SERIE ARMONICA

Dimostrazioni di divergenza e serie derivate

di Leonardo Calconi

05.07.2008

La base di questo lavoretto è contenuta negli appunti “Criteri di convergenza”.
Ho creduto opportuno “copiare ed incollare” in nuovi appunti la parte relativa alla serie armonica in modo che chi è interessato solo a questo argomento possa avere a disposizione un documento più agile.
Però, eventuali nuovi appunti sulla serie armonica li scriverò solo in questo documento lasciando la parte originaria contenuta nei “Criteri di convergenza” immutata.

Se si attribuisce all’aggettivo “armonica” il significato che gli compete e cioè quello musicale, per serie armonica si deve intendere solo la serie 1+1/2+1/3+...
Ma i testi sacri parlano di “serie armonica alternata”, “serie armonica prima” ecc.
Penso quindi di potermi prendere la libertà di intendere col termine “serie armoniche derivate” serie derivate dalla serie armonica che però armoniche non sono e di attribuire loro un nome che ne faciliti la memorizzazione.
Tali serie possono essere ottenute con una (e una sola) delle seguenti operazioni:

- soppressione di un determinato tipo di elementi, tenendo bene a mente che il numero degli elementi soppressi è una quantità non finita.
- manipolazione aritmetica identica di tutti i denominatori degli elementi della serie armonica
- alterazione regolare del segno degli elementi della serie armonica

Notazioni

$\doteq$ la serie ha per somma...

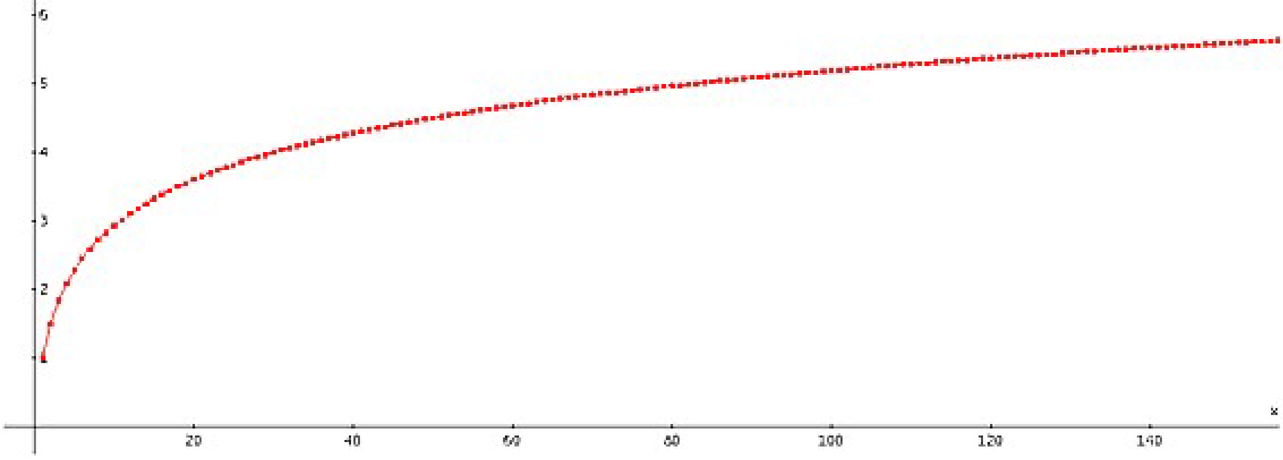
1 SERIE ARMONICA

(1.1)► **Serie armonica**: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

La somma parziale di ordine *n* della serie armonica è detta *numero armonico ennesimo*.
Come si verifica direttamente i primi numeri armonici sono, a partire dal secondo, numeri razionali (mai interi tranne il primo) con numeratore dispari e denominatore pari

$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \ldots$

e sono rappresentati graficamente in questo modo



La serie armonica diverge quindi, molto lentamente, e per avere un’idea di questa lentezza basta pensare che è

$$\sum_{k=1}^{250\cdot 10^6} \frac{1}{k} < 20$$

In appendice un banale codice JavaScript per calcolare i numeri armonici.
L'argomento deborda rapidamente dai ristretti confini di questo lavoro per cui ne diamo solo dei brevissimi cenni.

Il *numero armonico ennesimo* è rappresentato analiticamente da
$H_n = \gamma + \psi_0(n+1)$
dove γ è la *costante di Eulero-Mascheroni*

In onore dei due grandi matematici il primo dei quali riuscì a calcolarne le prime 16 cifre e il secondo le successive 16. Non è ancora noto se γ è razionale o irrazionale.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum\frac{1}{k} - \ln n\right) \simeq 0{,}5772156649015328606065120900824024310 42...$$

e $\psi_0(x)$ è la *Funzione Digamma* che a sua volta è definita come derivata logaritmica della *Funzione Gamma*

$$\psi_0(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$$

Della *Funzione Gamma* ci limitiamo a dire che per essa è valida la relazione seguente
$\Gamma(n) = (n-1)!$

Per completare questo quadro estremamente sintetico diciamo che la serie armonica è un caso particolare della S*erie Armonica Generalizzata* per $p=1$ trattata più avanti

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$$

con *p* reale positivo.
Se poi *p* è un numero complesso *s* si ha

$$\varsigma(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

ovvero la *Funzione Zeta di Riemann*.

Alla forma finale della funzione Zeta si arriva partendo dalla sua espressione analitica

$$\varsigma(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

che può essere ricondotta all'espressione

$$\varsigma(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$$

Calcolando l'integrale si trova

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt = \Gamma(s)$$

di qui la forma finale della funzione Zeta.

2 DIMOSTRAZIONI DELLA DIVERGENZA

(2.1)► **Criterio integrale.**
Il limite della successione armonica è chiaramente zero.
Per dimostrare che il limite della successione dei numeri armonici è $+\infty$ e che quindi la serie armonica diverge possiamo utilizzare il criterio integrale.

La funzione $y = \dfrac{1}{x}$ con *x* numero reale è rappresentata graficamente da un ramo di iperbole il cui integrale nell'intervallo $(1, n+1)$ è dato da $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \ln(n+1)$ e poiché $\ln(n+1)\to+\infty$ per $n\to\infty$, anche la serie armonica diverge positivamente.

(2.2)► **Proprietà associativa**
La più antica dimostrazione della divergenza della serie armonica è quella di Nicola Oresme che utilizza la proprietà associativa per scrivere una serie derivata dalla serie armonica

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(...+...+\frac{1}{2^k}\right)+...$$

Nicola Oresme fu un matematico del '300. Non disponeva del calcolo infinitesimale e non disponeva neanche della notazione matematica: ai suoi tempi essa veniva scritta in versetti...

Le quantità entro parentesi:

- hanno un numero 2^{k-2} di elementi

- hanno l'ultimo elemento del tipo $\frac{1}{2^k}$
- hanno tutti gli elementi $\geq \frac{1}{2^k}$
- sono tutte $\geq \frac{1}{2}$

Allora per una ridotta di ordine n avremo la seguente scrittura:

$$s_n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

Ma per $n \to \infty$ la successione a secondo membro diverge, quindi diverge anche quella a primo membro, quindi la serie derivata per associazione di termini da quella armonica diverge. Ma poiché applicando la proprietà associativa ad una serie a termini tutti positivi la somma non cambia, la serie armonica divergerà.

(2.3)► **Logaritmi**

Vale senz'altro la pena di dimostrare la divergenza della serie armonica utilizzando i logaritmi partendo dal numero e:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

passando ai logaritmi abbiamo

$$n\left[\ln(n+1) - \ln n\right] < 1 \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

ma a destra abbiamo il termine generico della serie armonica, per cui scrivendo le ridotte avremo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln k\right] = \ln(n+1)$$

Poiché la quantità a destra diverge per $n \to \infty$ anche la quantità a sinistra divergerà e pertanto per il criterio del confronto la serie armonica è divergente.

(2.4)► **Raggruppamento di termini**

Possiamo separare i termini pari da quelli dispari per ottenere due serie derivate dalla serie armonica e tramite esse dimostrare la sua divergenza.

Supponiamo per assurdo che la serie armonica converga e quindi abbia una somma finita A. Allora, separando i termini pari da quelli dispari possiamo scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} \Rightarrow A = A_p + A_d$$

ma il primo membro di questa uguaglianza possiamo scriverlo nel modo seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \Rightarrow A = 2A_p$$

ma allora deve essere per forza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \Rightarrow A_p = A_d$$

ma poiché è indiscutibilmente

$$\frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k}$$

dovrà anche essere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \Rightarrow A_d > A_p$$

il che contrasta con la scrittura precedente. A_p, A_d non possono essere quantità finite e quindi non lo è neanche *A*; la serie armonica pertanto diverge.
Viste separatamente, le due serie ottenute per separazione dei termini pari e dispari, sono divergenti quando confrontate con la serie armonica completa. Infatti per i termini generici si ha

$$\frac{1}{n_p} \le \frac{1}{n}, \frac{1}{n_d} \le \frac{1}{n}$$

Il raggruppamento dei termini della serie armonica può essere usato in mille maniere per dimostrare la sua divergenza partendo dall'ipotesi assurda della sua convergenza.
Ad esempio, detta *S* la somma cui converge per assurdo la serie armonica, col seguente raggruppamento si cade in evidente contraddizione

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots \doteq S$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\ldots \doteq S$$

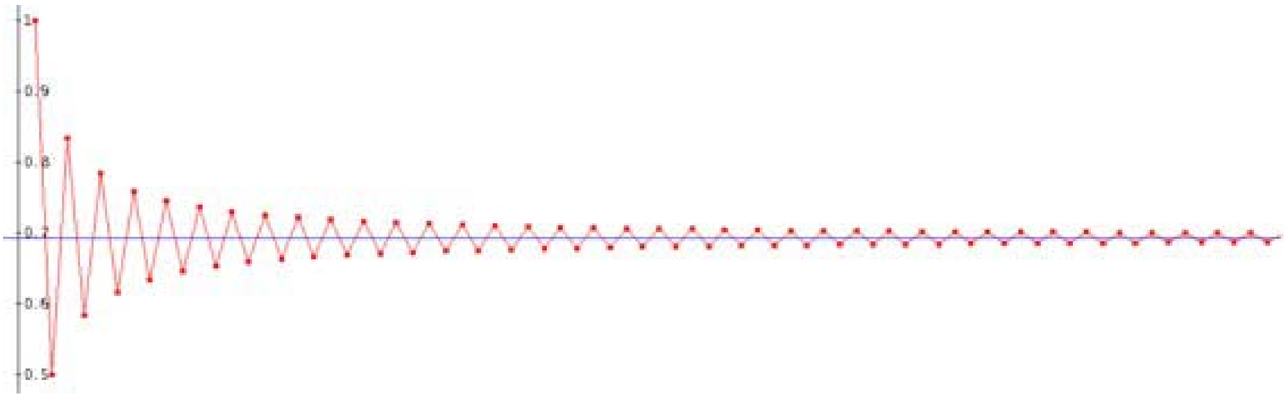
3 SERIE DERIVATE

(3.1)► **Serie armonica alternata** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

Il limite della successione a segni alternati è zero e pertanto per il *criterio di Leibniz* la serie relativa converge, ed più propriamente è *semiconvergente* perché la serie formata dai valori assoluti dei suoi termini è la serie armonica che diverge.
Come si verifica direttamente le prime somme parziali sono

$$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{47}{60}, \frac{37}{60}, \frac{319}{420}, \frac{533}{840}, \ldots$$

Ecco il grafico per le prime 76 somme parziali della serie che possiamo chiamare *numeri armonici alternati*



che mostra chiaramente come le somme parziali di indice pari formino una successione crescente e quelle dispari una decrescente e come tutte le somme parziali di indice pari siano minori di tutte le somme parziali di indice dispari.
Ma a cosa tendono le due successioni ?

Tendono a $\ln 2 \simeq 0.6931471805\ldots \rightarrow \left\{s_{10^6}\right\} \simeq 0.6931466805\ldots$

Ancora una volta ci troviamo di fronte ad un argomento che deborda dai limiti di questo lavoro; infatti la serie a segni alternati è rappresentata analiticamente da

$$H_n^{'}=\ln 2+\frac{1}{2}(-1)^n\left[\frac{\psi_0}{2}(n+1)+\frac{\psi_0}{2}(n+2)\right]$$

con $\psi_0(x)$ che rappresenta sempre la funzione Digamma.
Possiamo però dare conto senza particolari difficoltà della somma della serie armonica alternata
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \doteq \ln 2$$
Per fare ciò dobbiamo partire dalla costante di Eulero-Mascheroni vedendo come si arriva alla sua espressione analitica.
Consideriamo la successione
$$\{a_n\} = 1, \int_1^2 \frac{dx}{x}, \frac{1}{2}, \int_2^3 \frac{dx}{x}, ..., \frac{1}{n-1}, ..., \int_{n-2}^{n-1} \frac{dx}{x}, ...$$
i cui primi termini sono
$$1, \ln 2, \frac{1}{2}, (\ln 3 - \ln 2), ... \simeq 1, 0.6, 0.5, 0.4, ...$$
Tale successione è evidentemente decrescente e il suo termine generico $a_n \to 0$ per $n \to \infty$.
Allora per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ converge ed ha una somma finita
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k \doteq \gamma .$$
Calcoliamo tale somma scrivendo la ridotta di ordine $(2n-1)$
$$s_{2n-1} = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + ... + \frac{1}{n-1} - ... - \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$
Passando al limite avremo
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$
Ed ecco trovato il valore della costante di Eulero-Mascheroni.
L'espressione analitica di tale costante possiamo scriverla in modo da isolare la ridotta di ordine *n*
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \gamma + \ln n + \alpha_n \text{ con } \alpha_n \text{ infinitesimo.}$$
Tale espressione ci dice che, sopprimendo il primo ed il terzo termine del secondo membro con un errore minimo, si ha
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \simeq \ln n$$
e che quindi le ridotte della serie armonica crescono con andamento logaritmico, come evidenziato dal grafico del paragrafo precedente.
Ma torniamo alla serie armonica alternata le cui ridotte di ordine pari contengono evidentemente lo stesso numero di termini positivi e negativi. Applicando la proprietà associativa ad una ridotta di ordine *2n* possiamo separare i termini positivi dai negativi
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - ... - \frac{1}{2k}$$
da cui
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
Utilizzando l'espressione analitica tramite costante di Eulero-Mascheroni della ridotta ennesima otteniamo la *relazione asintotica*

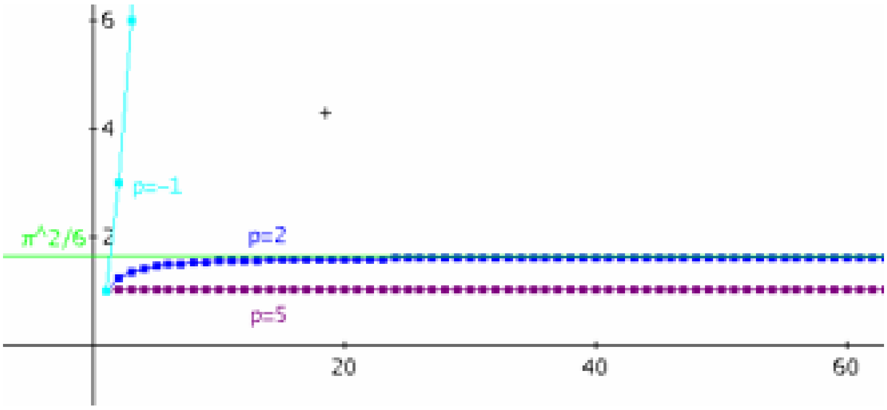
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=\gamma+\ln 2n+\alpha_{2n}-\gamma-\ln n-\alpha_n=\ln 2+\left(\alpha_{2n}-\alpha_n\right)$$
da cui passando al limite per $n\to\infty$ si ha
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\doteq\ln 2$$
c.v.d.

(3.2)► **Serie armonica generalizzata** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ con p intero.

La serie armonica generalizzata è una ***serie di Dirichlet*** *la cui forma generale è* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k}{k^p}$ *con gli* s_k *numeri complessi.*

Se $p>1$ applicando il criterio integrale si ha $\int_1^{\infty}\frac{1}{k^p}dx=\frac{1}{p-1}$ ovvero l'integrale è finito e quindi la serie converge.

Se $p\leq 1$ in base al criterio integrale si ha $\int_1^{\infty}\frac{1}{k^p}dx=\infty$ e quindi la serie diverge.



Cosa succede se $p=2$?
Ripeschiamo la funzione Zeta di Riemann che con $s=2$ diventa una delle formule di Eulero
$$\varsigma(2)=\frac{\pi^2}{6}$$
Quindi la serie armonica generalizzata con esponente 2 converge a
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\doteq 1{,}6449340668482264364...$$
Dai i risultati ottenuti nel paragrafo precedente sappiamo che le ridotte della serie armonica crescono con andamento logaritmico e poiché la serie armonica è una serie armonica generalizzata le ridotte di tutte le serie armoniche generalizzate cresceranno con tale andamento.
Eulero ha calcolato i valori della funzione Zeta da $\varsigma(2)$ a $\varsigma(26)$ solo per i termini di indice pari.
Ecco i primi dieci valori per indici pari e dispari:

$\varsigma(1)=\infty$

$\varsigma(2)=\frac{\pi^2}{6}=1{,}64493406...$

$\varsigma(3)=1{,}2020569032...$

$\varsigma(4)=\frac{\pi^4}{90}=1{,}082323233...$

$\varsigma(5)=1{,}0369277551...$

$\varsigma(6)=\frac{\pi^6}{945}=1{,}017343061...$

$\varsigma(7)=1{,}0083492774...$

$\varsigma(8)=\frac{\pi^8}{9450}=1{,}004077356..$

$\varsigma(9)=1{,}0020083928...$

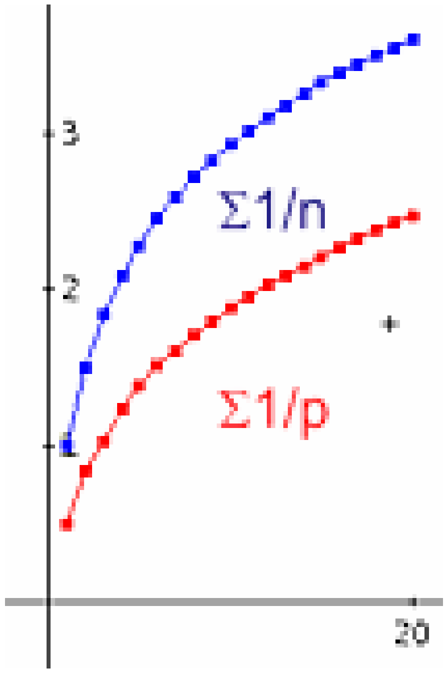
$\varsigma(10)=\frac{\pi^{10}}{93555}=1{,}000994575...$

(3.3)► **Serie armonica prima** $\sum_{p\in P=1}^{\infty}\frac{1}{p}$

p è uguale ordinatamente a tutti i numeri primi

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...$

Quindi la serie armonica prima è la serie dei reciproci dei numeri primi, ovvero è una serie nella quale sono stati soppressi tutti i termini non primi.
Si badi a non utilizzare questa proprietà per dedurne la sua divergenza utilizzando, ad esempio, il criterio del resto poiché la quantità di termini soppressi non è finita.
La somma parziale generica di tale serie è data dalla relazione asintotica



$$\sum_{p\in P,i=2}^{n}\frac{1}{p_i}\doteq \ln\ln n+\mu+o(1)$$

dove $\mu=\gamma+\sum_{p\in P,k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1-p_k^{-1}\right)+\frac{1}{p_k}\right]=0.2614972128...$

è la *costante di Mertens.*
Tale relazione asintotica costituisce il *secondo teorema di Mertens*.
La serie è divergente con andamento logaritmico doppio e quindi estremamente lento. Per averne un'idea basti pensare che per $n=250\cdot 10^6$ la ridotta di ordine corrispondente vale appena 3,2235...
Eulero dimostrò per primo la divergenza della serie.
Una dimostrazione non entusiasmante può consistere nell'applicare il criterio del confronto con la serie armonica.
Poiché i termini della serie armonica sono ordinatamente maggiori o uguali ai termini della serie armonica prima, poiché la serie armonica non converge non convergerà neanche la serie armonica prima ed essendo essa a termini tutti positivi, non può essere indeterminata e deve pertanto divergere.
Ecco invece una robusta dimostrazione di Chebyshew.
Consideriamo la serie geometrica di ragione $\frac{1}{p}$ e la sua somma

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\doteq\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

e quindi la produttoria

$$\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...\right)\cdot...\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

per la quale si ha evidentemente la disuguaglianza

$$\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

dalla quale passando ai logaritmi si ha

$$\sum_{p\le n}-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\ge\ln\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Ora consideriamo la serie seguente e la sua somma

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k}=-a-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}-...\doteq\ln(1-a)$$

ponendo $\frac{1}{p}=a$ avremo la disuguaglianza

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+...\le\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\le\frac{2}{p}$$

Componendo le disuguaglianze fin qui viste avremo

$$\sum_{p\le n}\frac{2}{p}\ge\sum_{p\le n}-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Le due espressioni sono ridotte di serie armonica prima a primo membro e serie armonica a secondo membro e pertanto poiché la serie armonica diverge divergerà anche la serie armonica prima.

(3.4)► **Serie armonica radicale** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}+...$$

La serie armonica radicale diverge essendo il suo termine generico maggiore del corrispondente termine generico della serie armonica.
Poiché la divergenza di questa serie è rapidissima, per rendere leggibile il grafico si è usata al suo posto la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

(3.5) **Serie armonica fattoriale** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$$

La serie armonica fattoriale converge ed ha somma pari a $e-1$.
Che la serie converge ce lo dice subito il criterio di D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Ma possiamo verificare la convergenza anche senza ricorrere ad alcun criterio.
Troviamo una serie la cui ridotta di ordine *n* sia maggiore o uguale alla ridotta di ordine *n* della serie data

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n\ge1\cdot2\cdot2\cdot...\cdot2=2^{n-1}\Rightarrow\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

La ridotta che abbiamo appena trovato è la ridotta di una serie geometrica di primo termine 1 e ragione $r=\frac{1}{2}$ che per $|r|<1$ converge e pertanto la successione delle sue ridotte è limitata superiormente

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Poiché la somma di tale serie geometrica è

$$\frac{1}{1-r}$$

si avrà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \doteq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

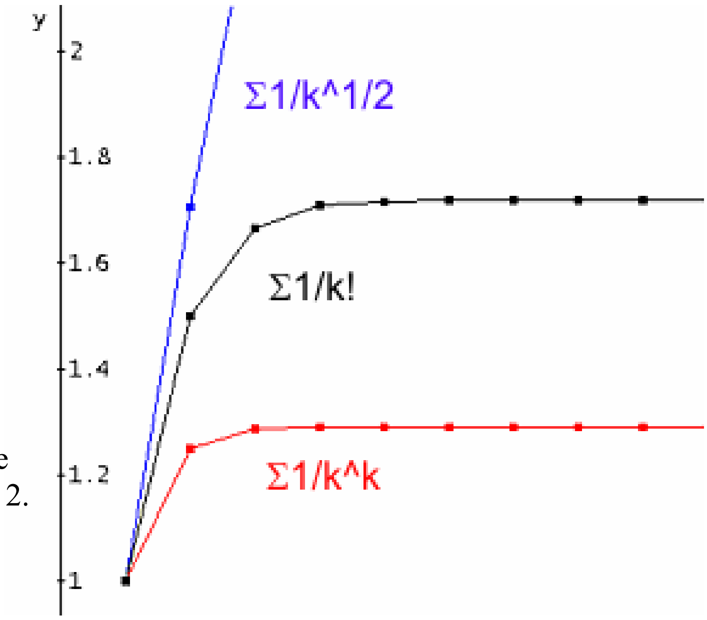
e per la diseguaglianza impostata all'inizio la serie fattoriale sarà convergente ad un valore minore di 2.

Conoscendo la somma seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \doteq e$$

la somma della serie armonica fattoriale sarà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \doteq e-1 = 1{,}718281828\ldots \text{ c.v.d.}$$



(3.6) **Serie armonica esponenziale** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\ldots$$

La serie armonica esponenziale converge perché il suo termine generico è minore o uguale al corrispondente termine generico della serie fattoriale, oppure, se vogliamo applicare il criterio della radice, perché si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

La somma della serie, ricavata al computer, è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \doteq 1{,}29128599706266354040728259059\ldots$$

4 APPENDICE

(4.1)► Calcolatore JavaScript di numeri armonici

Copiare ed incollare tutto il codice seguente in una pagina html vuota in modalità codice.

```
<html>
<head>
<script language="JavaScript">
function calcola(form)
{
form.result.value = somma(form.arg.value)
}
function somma(n)
{
s = 0
for(i=1; i <= n; i++) {
s += 1.0/i
}
return s
}
</script>
</head>
<body>
<form>
```

```
<pre>
Ordine della ridotta: <INPUT TYPE="text" NAME="arg" SIZE=12 >
</pre>
<pre>
<INPUT TYPE="button" VALUE="Calcola" onclick="calcola(this.form)">
Somma parziale:       <INPUT TYPE="text" NAME="result" SIZE=50 >
</pre>
</form>
</body>
</html>
```

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math