DETERMINANTI

Esercizi sul calcolo dei determinanti di matrici quadrate

di Leonardo Calconi

Prima revisione del 10.10.07

1 – Matrici quadrate col secondo teorema di Laplace

Il determinante di una matrice quadrata è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna per i rispettivi complementi algebrici $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

(1.1)►

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 6 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Il complemento algebrico di un elemento è il determinante che si ottiene cancellando dalla matrice la riga e la colonna alle quali appartiene l'elemento. Il segno del complemento algebrico è positivo se la somma dell'ordine della riga più l'ordine della colonna è pari, negativo se è dispari.
Sviluppando det(A) secondo la prima riga

$$\det(A) = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 9\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) - 9\cdot 4 + 7\cdot 48 = 284$$

(1.2)►

E' evidente che:

- se una matrice quadrata presenta un vettore-colonna o un vettore riga nullo il suo determinante è nullo.
- se una matrice presenta due vettori-riga o due vettori colonna proporzionali il determinante è nullo in quanto uno dei due vettori può essere ridotto a zero con operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 33 & 12 \\ 11 & -9 & 5 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Poichè la prima e terza riga sono proporzionali si ha det(A) = 0, il che è confermato dall'applicazione del teorema di Laplace:

$$\det(A) = 7(33\cdot 5 + 12\cdot 9) - 11(21\cdot 5 - 12\cdot 11) + 4(21\cdot(-9) - 33\cdot 11) = 0$$

(1.3)►

Il determinante di una matrice quadrata ottenuto dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna per i complementi algebrici di un'altra riga o un'altra colonna è uguale a zero.
Se calcoliamo in questo modo il determinante (1.1) riferendoci alla seconda riga otteniamo

$$6\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 6\cdot(-8) - 0\cdot 4 + 1\cdot 48 = 0 \neq \det(A)$$

(1.4) ►

Il teorema di Laplace può essere adoperato in cascata per determinanti di ordine 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppando secondo la prima riga si ottiene

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 5 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

e quindi sviluppando i complementi algebrici

$$2\left\{0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\right\} - 9\left\{6\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+7\left\{6\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}\right\} - 3\left\{6\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 2\{0 - 14 + 4 \cdot 52\} - 9\{-6 \cdot 29 + 21 + 4 \cdot 38\} + 7\{6 \cdot 14 - 4 \cdot 56\} - 3\{6 \cdot 52 - 56\} =$$

$$= 388 + 9 - 980 - 768 = -1351$$

Per matrici di ordine superiore a 4 l'applicazione in cascata del teorema di Laplace comporta calcoli con margine d'errore troppo elevato.

(1.5)►

La scelta della riga o della colonna lungo la quale sviluppare i calcoli deve essere fatta in modo più intelligente che nell'esercizio precedente dove avremmo dovuto scegliere la seconda riga o la seconda colonna che contengono uno zero e semplificando così i calcoli.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppando lungo la seconda colonna si ha un calcolo molto più semplice che scegliendo un'altra colonna o una riga.

$$\det(A) = -8\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -8\{2(3-28) - 7(18-36) + 3(42-9)\} = -1400$$

2 – Matrici quadrate di ordine 3 con la regola di Sarrus

Con matrici rettangolari o quadrate di ordine diverso da 3 la regola di Sarrus non è applicabile.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si costruisca una tabella aggiungendo a destra le prime due colonne:

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

e si calcoli il determinante nel seguente modo:

aei + bfg +cdh – ceg – afh – bdi

(2.1)►

Con questa regola il determinante dell'esercizio (1.1) si calcola dalla tabella

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 7 & 2 & 9 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \end{matrix} \Rightarrow 0 + 72 + 336 - 0 - 16 - 108 = 284$$

3 – Matrice di Vandermonde
E' una matrice quadrata del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ a_1 & a_2 & .a_3 & . & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & . & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

nella quale, dati gli elementi della seconda riga, tutte le altre righe sono formate dagli elementi della seconda elevati ad una potenza pari all'ordine della riga meno 1.

Il determinante di Vandermonde è uguale al prodotto di tutte le differenze della riga con esponente 1.

(3.1)►

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

E' evidente che se due numeri della riga con esponente 1 sono uguali il determinante è nullo.

4 – Matrici quadrate triangolari o diagonali

I determinanti di tali matrici sono uguali al prodotto degli elementi della diagonale.

(4.1)►

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ -11 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 123 & -95 \\ 321 & 0 & 770 \\ -11 & 747 & 0 \end{pmatrix}$$

det(A) = det(B) = det(C) = -66, det(D) = 0

(4.2)►

Se un elemento della diagonale è nullo il determinante è nullo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} R: I = I - III \to II = II + III \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Il risultato era atteso essendo la prima e seconda riga proporzionali.

Procedimento di eliminazione di Gauss-Jordan:
Una matrice quadrata può essere ridotta a triangolare con operazioni elementari sulle righe.
> Scambiare tra loro due righe.
> Sommare o sottrarre ad una riga un'altra riga o la somma di due o più righe.
> Moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero.
> Sommare o sottrarre da una riga un'altra riga moltiplicata per uno scalare diverso da zero.
Se la matrice è quadrata le stesse operazioni possono essere eseguite sulle colonne perchè è det(A) = det(A^T).
Nell'ambito di uno stesso procedimento di eliminazione si possono eseguire sia operazioni sulle righe che operazioni sulle colonne, ma nell'ambito del singolo passaggio l'operazione è esclusiva o sulle righe o sulle colonne.
In queste operazioni coi numeri romani indicheremo le righe e con quelli arabi lo scalare moltiplicativo. R denota un'operazione sulle righe, C un'operazione sulle colonne.

(4.3)►

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&1&1&2\\1&2&3&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}\text{R: }I\rightleftarrows III\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&2\\1&1&2&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}\text{R: }IV\text{=}IV\text{-}I\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\text{R: }IV\text{=}IV\text{+}III\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=1$$

5 – Matrici quadrate a blocchi

(5.1)►

Una matrice a blocchi è del tipo

$$\text{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&7&9&5\\0&0&9&7&3\\0&0&1&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A'&0\\0&A''\end{pmatrix}$$

e per essa è $\det(A)=\det(A')\cdot\det(A'')$, dove è

$$\det(A')=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1 \text{ e } \det(A'')=\begin{vmatrix}7&9&5\\9&7&3\\1&5&2\end{vmatrix}=7\cdot(14-15)-9\cdot(18-3)+5\cdot(45-7)=48=\det(A)$$

Osserviamo che possiamo scrivere una matrice di matrici

$$A=\begin{pmatrix}A'&0\\0&A''\end{pmatrix}\ \textit{dove}\ A'=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\ A''=\begin{pmatrix}7&9&5\\9&7&3\\1&5&2\end{pmatrix}\ \textit{e}\ 0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale, e un determinante di determinanti

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\det(A')&0\\0&\det(A'')\end{vmatrix}\ \textit{dove}\ \det(A')=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix},\ \det(A'')=\begin{vmatrix}7&9&5\\9&7&3\\1&5&2\end{vmatrix}\ \textit{e}\ 0=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{vmatrix}$$

da cui $\det(A)=\det(A')\cdot\det(A'')$

*Sono verificati anche i seguenti casi di matrici a blocchi (le matrici **I** sono matrici identiche):*

$$A=\begin{pmatrix}A'&0\\A''&A'''\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(A')\cdot\det(A'''),\quad A=\begin{pmatrix}A'&A''\\0&A'''\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(A')\cdot\det(A'')$$

$$A=\begin{pmatrix}A'&0\\A''&I_{A'}\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(A'),\quad A=\begin{pmatrix}I_{A'''}&0\\A''&A'''\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(A''')$$

$$A=\begin{pmatrix}A'&0&0\\0&A''&0\\0&0&A'''\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=\det(A')\cdot\det(A'')\cdot\det(A''')$$

Trattandosi di matrici quadrate i risultati precedenti valgono anche per le relative trasposte essendo det(A) = det(A^T)

(5.2)▶
Una matrice qualsiasi può essere riconducibile con operazioni elementari sulle righe ad uno dei casi visti di matrici a blocchi.
Questa opzione, per matrici di grandi dimensioni, è quasi sempre preferibile a quella di ridurre la matrice a triangolare che prevede un calcolo più semplice del determinante ma passaggi più numerosi di operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 7 & 7 & 11 \\ 9 & 9 & 9 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 4 & 4 & 0 \\ 9 & 5 & 5 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$R: I = I - IV + VI \rightarrow II = II - V - IV \rightarrow III = III - 2IV - V$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -12 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 5 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

La matrice equivalente per righe è una matrice a blocchi il cui determinante è dato da

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -12 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \\ -11 & -3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-21) \cdot 0 = 0$$

Un altro esempio di riconducibilità di una matrice quadrata ad una matrice a blocchi del tipo $A = \begin{pmatrix} A' & A'' \\ 0 & A''' \end{pmatrix}$ con operazioni elementari sulle righe è dato dall'esercizio (4.3).

(5.3)▶
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 12 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 24 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

essa può essere ricondotta ad una matrice a blocchi prima con operazioni elementari sulle righe:

$$\text{R: I = I -3II} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 24 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{R: II = II –IV/2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 24 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

e poi con operazioni elementari sulle colonne:

$$\text{C: II = II -3I} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{C: I = I - IV} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui si calcola molto facilmente
$\det(A)$ = (-48)4 = -192
Domanda. Abbiamo eseguito operazioni miste su righe e su colonne: è lecito ?

Affermativo, perchè le operazioni sono state eseguite separatamente su righe e su colonne, ottenendo ad ogni passaggio una matrice equivalente o per righe o per colonne.
Non è invece possibile eseguire singoli passaggi che coinvolgano righe e colonne ad un tempo, ad esempio sommare ad una riga una colonna, scambiare una riga con una colonna ecc.

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math