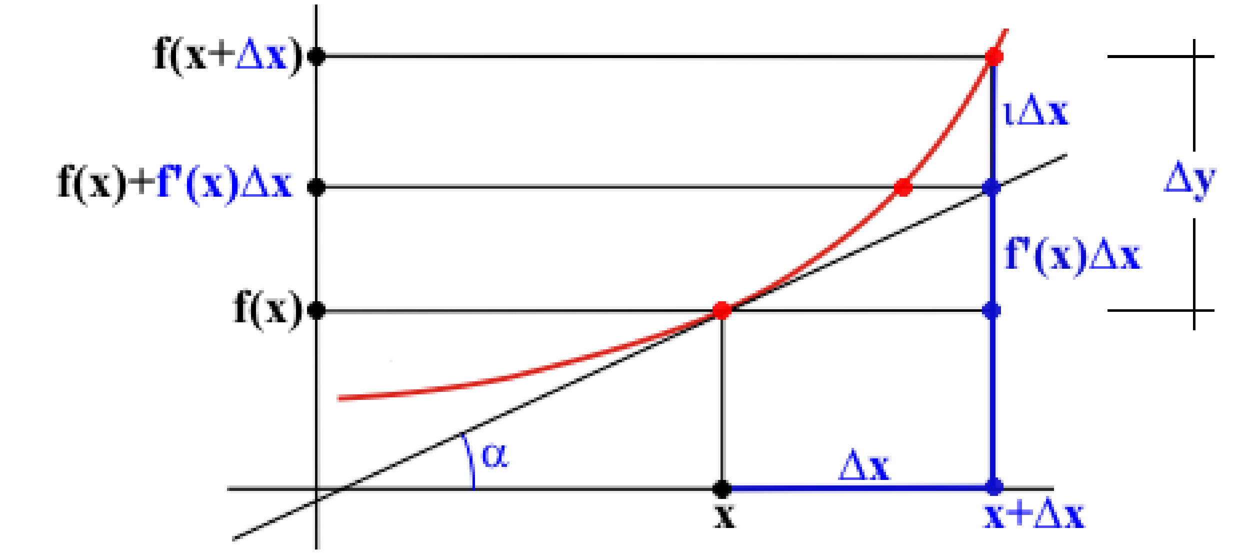
IL DIFFERENZIALE

Un po' di teoria ed alcuni esercizi
di Leonardo Calconi

1 UN PO' DI TEORIA

Cos'e il differenziale

Il differenziale di una funzione $f(x)$ derivabile in x altro non è che la *parte maggiore* dell'incremento Δy subito dalla funzione quando la variabile indipendente x viene incrementata di Δx.



Nel disegno, per evidenti ragioni di chiarezza, è stato scelto un Δx tale che la *parte maggiore* dell'incremento non è sufficientemente più grande della *parte minore,* come si intuisce essere se si diminuisce la grandezza di Δx.
Allora, con maggior proprietà di linguaggio, possiamo dire che il differenziale rappresenta l'incremento lineare della tangente in x al variare di Δx.
Come vedremo, agli effetti pratici il differenziale permette di valutare con semplici calcoli cosa accade alla funzione per incrementi della variabile indipendente x che siano compresi in un intorno di raggio ε sufficientemente piccolo. In parole povere, di calcolare il valore della funzione $f(x \pm \varepsilon)$ laddove sia noto il valore di $f(x)$.

Definizione di differenziale

Definiamo ora in modo formale il differenziale partendo dalla definizione di derivata come limite, se esiste, del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

In forza di questa scrittura il rapporto incrementale differirà dalla derivata di un infinitesimo ι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \iota$$

infinitesimo che tende a zero al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente.
Ma la scrittura precedente equivale a

►(1.1) $\Delta y = f'(x)\Delta x + \iota\Delta x$

la quale ci mostra come l'incremento della funzione sia composto da due parti delle quali la prima

►(1.2) $dy = f'(x)\Delta x$

è la maggiore e viene detta *differenziale* della funzione.
Geometricamente la dimostrazione è elementare considerando che

$$f'(x)\Delta x = \Delta x \tan\alpha$$

Ora, poichè il differenziale della variabile indipendente si identifica col suo incremento, ovvero è

$$\Delta x = dx$$

potremo considerare la derivata di una funzione in un punto x come il rapporto tra due differenziali

►(1.3) $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Quindi anche la (1.1) può essere riscritta nella forma seguente

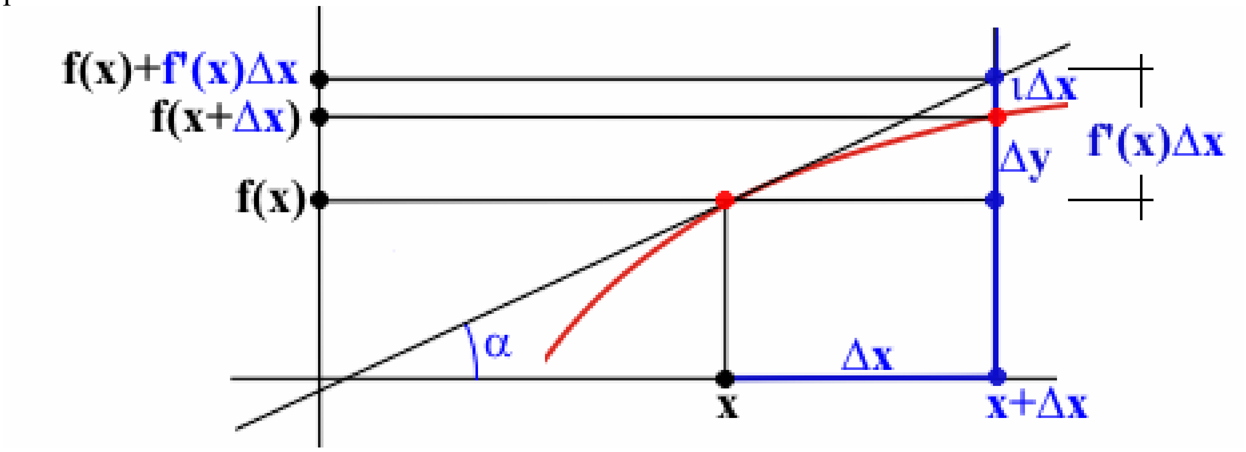
►(1.4) $\Delta y = dy + \iota\Delta x$

dal che risulta che l'incremento della funzione differisce dal differenziale della medesima per un infinitesimo di ordine superiore al differenziale della variabile indipendente.
Laddove tale differenziale sia sufficientemente piccolo, potremo dire che il differenziale della funzione approssima piuttosto bene il suo incremento

►(1.5) $\Delta y \approx dy$

e pertanto, poichè tale differenziale è di calcolo semplice, come detto all'inizio potremo calcolare i valori di una funzione in un suo intorno $\varepsilon \geq \Delta x$ laddove $f(x)$ sia noto.

Potrebbe sembrare che il differenziale debba essere sempre minore dell'incremento. Ma non è, ovviamente, vero. Infatti basta considerare la stessa funzione con la concavità rivolta verso il basso per desumere che in tal caso è vero il contrario.



Operazioni sui differenziali

In base alla definizione di differenziale (1.2), le operazioni elementari sui differenziali sono le stesse delle derivate:

- ✓ $dk = 0$ se k è una costante
- ✓ $d(ky) = kdy$
- ✓ $d(y \pm z) = dy \pm dz$
- ✓ $d(yz) = ydz + zdy$
- ✓ $d\left(\dfrac{y}{z}\right) = \dfrac{zdy - ydz}{z^2}$ con $z \neq 0$.■

2 QUATTRO APPLICAZIONI GEOMETRICHE

(2.1)
Supponiamo di voler calcolare il valore della funzione parabola $y = x^2$ per $x = 8.1$.
Calcoliamo prima l'incremento Δy di $f(8)$ per $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = 1.61$$

Ora calcoliamo il differenziale:

$$dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x = 1.6$$

Come si vede l'errore che si commette prendendo in considerazione il differenziale anzichè l'incremento è pari a 0.01.
Ora vediamo la faccenda da un altro punto di vista.
Poichè stiamo parlando di quadrati, possiamo affermare che dato un quadrato di 8 centimetri di lato la cui area è 64 cmq., se si aumenta di un millimetro ciascun lato l'incremento dell'area è pari a $1.6 \approx 1.61$ cmq.

(2.2)
Ripetiamo lo stesso esercizio per $y = x^3$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = 19.441$$

$$dy = \left(x^3\right)' \Delta x = 3x^2\Delta x = 19.2$$

Come si vede, nel caso del cubo per lo stesso incremento degli spigoli il differenziale approssima il reale incremento di volume decisamente meno essendo l'errore pari a 0.241.

(2.3)
Vediamo infine cosa succede al volume di una sfera $y = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ di raggio 8 cm. se tale raggio viene incrementato di un millimetro.

$$\Delta y = \frac{4\pi}{3}(r + \Delta r)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3 = 81.43427036$$

$$dy = \frac{4\pi}{3}\left(r^3\right)' \Delta r = \frac{4\pi}{3} 3r^2\Delta r = 80.42477193$$

Come si vede la situazione è ulteriormente peggiorata essendo salito l'errore che si commette sostituendo l'incremento col differenziale a circa un'unità: 1.009498430

(2.4)
Del resto, se ripetessimo l'esercizio precedente per un cerchio dello stesso raggio e per uno stesso incremento del medesimo otterremmo:

$$\Delta y = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 5.057964172$$

$$dy = \pi \left(r^2\right)' \Delta r = \pi 2r\Delta r = 5.026548245$$

con un errore di 0.3141592700.
Ma questi sono errori assoluti. Considerate la cosa anche dal punto di vista degli errori percentuali...■

3 ALCUNI ESERCIZI

Potrebbe sembrare superfluo aver parlato nel paragrafo precedente di calcolo del differenziale dal momento che in quegli esempi l'incremento della funzione si calcola con esattezza per differenza. In realtà ciò è stato utile per apprezzare di quanto il differenziale differisca dall'incremento e negli esercizi che seguono sarà immediatamente chiara l'utilità di tale calcolo quando dei due l'unico calcolabile è il differenziale.

(3.1)

Calcolare il valore di $\sin 46°$.

Poichè non siamo in grado di calcolare direttamente il valore dell'incremento procediamo nel modo seguente.

In base alla (1.5) abbiamo

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

Tenendo presente che $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$ avremo che

$$\sin(45°+1°)\approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{360}=0.7194481226$$

contro un valore reale di 0.7193398003 e quindi con una approssimazione di tre decimali esatti. Il risultato sembra molto interessante in quanto se avessimo voluto utilizzare la Formula di Taylor saremmo andati incontro a calcoli ben più complessi.

Ma noi ci stiamo servendo di un'approssimazione lineare che fornisce rapidamente risultati peggiori man mano che cresce Δx.

Infatti già per $\Delta x = 3°$ si avrebbe

$$\sin(45°+3°)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\pi\sqrt{2}}{360}=0.7441308056$$

contro un valore reale di 0.7431448254 e quindi con solo due decimali esatti.

(3.2)

Calcolare il valore di $\frac{2}{\sqrt{8.99}}$

$$dx = 0.01$$

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{9}}=0.\overline{6}$$

$$dy = f'(x)dx = -\frac{1}{x^{3/2}}\cdot(-0.01) = -0.0003\overline{703}$$

$$f(x+dx)\approx f(x)+dy = 0.666\overline{296}$$

$$f(x+dx) = 0.6670373459...$$

(3.3)

Calcolare il valore di $\sqrt[4]{17}$

$$f\left(x+dx\right)\approx f\left(x\right)+dy=\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4*16^{3/4}}=2.03125$$

contro un valore reale di 2.030543184.

Si noti come la funzione $y=\sqrt[4]{x}$ sia maggiormente approssimabile al crescere di x.

Infatti per $x=981506242$ si avrebbe

$$f\left(x+dx\right)\approx f\left(x\right)+dy=177+\frac{1}{4*177^{3/4}}=177.0051518$$

contro un valore reale di 177.00000004508

La precisione offerta è sempre di due decimali esatti, ma con un errore percentuale nel primo caso dello 0.059%, nel secondo dello 0.0029%.

(3.4)

Calcolare il valore della funzione $y=x^3-4x^2+5x+3$ **per** $x=1.03$

Per $x=1$ si ha $y=5$ ove la funzione presenta un massimo e pertanto il valore approssimato cercato sarà:

$$f\left(x+dx\right)\approx f\left(x\right)+dy=5+3x^2-8x+5=5$$

contro un valore reale di 4.999126999, quindi con un differenziale che praticamente coincide con l'incremento.

(3.5)

Calcolare il differenziale di $y=\frac{1}{x^a}$ **e** $z=\frac{x}{1-x}$ **per valori qualsiasi di** dx

$$dy=-\frac{adx}{x^{a+1}},\ dz=\frac{dx}{1-x^2}$$

(3.6)

Calcolare il differenziale di $y=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)-\ln\left(1+x\right)$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$dy=\frac{2dx}{x^2-1}$$

(3.7)

Calcolare i differenziali di $y=e^x$, $z=e^{-x^2}$

$$dy=e^x dx,\ dz=-2xe^{-x^2}dx$$

(3.8)

Calcolare il differenziale di $y = \sin\sqrt{x}$

Per risolvere questo esercizio dobbiamo introdurre la proprietà *di* ***invarianza del differenziale***.
Date le funzioni

$$y = f(u),\ u = g(x) \Rightarrow y = f(g(x))$$

il differenziale della funzione composta è dato da

$$dy = Dy \cdot du$$

L'invarianza del differenziale consiste quindi nel fatto che esso se ne infischia se la variabile x è indipendente o funzione di un'altra variabile a sua volta indipendente o meno.
Quindi, tornando al nostro esercizio, si ha che

$$y = \sin u,\ u = \sqrt{x}$$

$$Dy = \cos u = \cos\sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = Dy \cdot du = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

(3.9)

Calcolare il differenziale di $y = \arcsin\frac{x}{a}$

Anche in questo esercizio si utilizza la proprietà di invarianza.

$$y = \arcsin u,\ u = \frac{x}{a}$$

$$Dy = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$du = \frac{dx}{a}$$

$$dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it
25/05/2007

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math