

L.D. – L.I.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori...for dummies di Leonardo Calconi

Quarta revisione del 18/07/2008

Questo lavoro è un modesto tentativo di chiarire le idee sulla dipendenza e indipendenza di insiemi di vettori, sul calcolo delle basi di spazi vettoriali e sulla manipolazione di vettori tramite matrici. L'argomento è quindi "piccolo", se volete, ma richiede una quantità "non piccola" di conoscenze di algebra lineare che ritengo acquisite.

Dimostrerò solo il *teorema del rango più nullità*, per la sua grande importanza, ed un altro paio di cosette; per il resto mi atterrò ai soli enunciati rinunciando alle dimostrazioni, in genere molto semplici, che avrebbero diluito eccessivamente il lavoro rendendolo dispersivo.

Ho fatto largo uso di algebra delle matrici e dei determinanti dando per scontato che il lettore sia ampiamente istruito sull'argomento.

Ho cercato di richiamare l'attenzione sulla necessità di prescindere dai significati geometrici e di concentrarsi esclusivamente sugli assiomi per potersi muovere con agilità in spazi che hanno un numero di dimensioni superiore a quello dello spazio metrico a tre dimensioni, unico spazio che ci è concesso di percepire tramite i nostri sensi.

Può apparire questa un'istanza banale, ma se ci si riflette sopra con la dovuta attenzione si verificherà come nella nostra mente sia radicata la tendenza ad associare oggetti matematici astratti ed operazioni su di essi a concetti geometrici reali che perdono completamente di significato al di fuori della geometria euclidea e quindi al di fuori dello spazio in cui viviamo e dell'universo cui apparteniamo.

L'algebra è appunto astrazione basata su assiomi ed è l'unico strumento che ci permette di uscire dalla "gabbia" a tre dimensioni nella quale la nostra struttura di umani ci costringe.

Notazioni: in questi appunti ho scritto il prodotto scalare di vettori come $(v_i v_j)$ e non come $\langle v_i, v_j \rangle$.

Sommario

- 1 Spazio lineare e spazio vettoriale
- 2 Vettori, punti o ennuple ?
- 3 Prodotto di un vettore per uno scalare
- 4 Generazione di uno spazio vettoriale
- 5 Dipendenza e indipendenza vettoriale
- 6 Basi
- 7 Matrici di vettori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare con i determinanti
- 9 Trasformazioni lineari e matrici associate
- 10 Teorema del rango
- 11 Il teorema del rango applicato alle matrici
- 12 Esercizi svolti

oooooooooooo

1 – Spazio lineare e spazio vettoriale

Uno spazio lineare è un insieme di oggetti matematici x (di qualunque tipo: numeri, funzioni, integrali, vettori...) che possono essere sommati tra di loro e moltiplicati per dei numeri n (reali o complessi). Ci riferiremo sempre a spazi lineari finiti, ovvero che contengono un numero finito di elementi.

Quindi definiremo S uno **Spazio Lineare Reale** (se è prevista la moltiplicazione per numeri reali) o uno **Spazio Lineare Complesso** (se è prevista la moltiplicazione per numeri complessi) come insieme di oggetti matematici per il quale sono verificati i seguenti **10 assiomi** comuni ai due spazi:

1. *Chiusura rispetto all'addizione di elementi dell'insieme:* $(x_i + x_j) \in S$
2. *Chiusura rispetto alla moltiplicazione degli elementi per numeri:* $nx_i \in S$
3. *Proprietà commutativa dell'addizione tra elementi:* $x_i + x_j = x_j + x_i$
4. *Proprietà associativa dell'addizione tra elementi:*
 $(x_i + x_j) + x_k = (x_j + x_k) + x_i = (x_i + x_k) + x_j$
5. *Esistenza dell'elemento nullo:* $x_i + O = x_i$
6. *Esistenza degli elementi opposti:* $x_i + (-1)x_i = O$
7. *Proprietà associativa della moltiplicazione per numeri:* $n(mx_i) = (nm)x_i$
8. *Proprietà distributiva rispetto all'addizione:* $n(x_i + x_j) = nx_i + nx_j$
9. *Proprietà distributiva rispetto all'addizione:* $(n + m)x_i = nx_i + mx_i$
10. *Esistenza dell'elemento identico:* $1x_i = x_i$

Sono esempi di spazi lineari l'insieme delle funzioni definite o derivabili in un certo intervallo, l'insieme dei polinomi, l'insieme dei numeri complessi.

Possiamo chiamare **Spazio Vettoriale** un insieme di vettori in un n -spazio che, come insieme che soddisfa i dieci assiomi, è quindi un esempio di spazio lineare.

In questo lavoro prenderemo in considerazione solo spazi vettoriali su corpo reale \mathbb{R}_n .

2 – Vettori, punti o ennuple ?

Ma che cos'è un **vettore** ?

Se vogliamo pensare in termini generali, dobbiamo cercare di eliminare dalla nostra mente i significati geometrici che afferiscono al termine “vettore” e alle operazioni con esso eseguibili. E' ovvio infatti che si può parlare di significati geometrici solo laddove valgono i postulati della geometria euclidea, ovvero nello spazio percepibile che è quello metrico a tre dimensioni.

Quindi termini come “modulo”, “direzione”, “verso” non hanno significato in spazi con dimensioni maggiori di tre e lo stesso termine “vettore”, se inteso come istanza che ha un punto di applicazione, un modulo, una direzione e un verso, in tali spazi non ha significato.

Rimanendo ancorati a spazi con 2 o 3 dimensioni possiamo dire che qualsiasi vettore in uno di questi due spazi è equivalente ad un vettore di stessi modulo, direzione e verso applicato nell'origine e quindi può essere definito semplicemente da una coppia o da una terna ordinata di numeri reali che ne identifica il punto dove esso finisce.

Possiamo quindi dire che un **punto** identifica un vettore ?

In spazi di dimensione 2 o 3 ciò è lecito, in spazi di dimensione superiore a 3 anche il termine “punto” perde di significato e possiamo definire un “vettore” soltanto mediante una **ennupla ordinata** con l'accordo che per “vettori” intenderemo proprio le ennuple, ovvero oggetti matematici che possono essere sommati tra di loro e moltiplicati per uno scalare e un cui insieme viene definito spazio lineare se in esso valgono i dieci assiomi e nulla più, privando quindi il termine “vettore” e le operazioni con esso eseguite dei significati geometrici e considerando lo spazio metrico a tre dimensioni soltanto come uno dei tanti possibili spazi lineari.

3 – Prodotto di un vettore per uno scalare

Risulterà più facile considerare i vettori come gli oggetti matematici descritti sopra se in prima istanza li si considera appartenenti ad uno spazio vettoriale a due dimensioni.

Se prendiamo un vettore v_1 di modulo 1 applicato nell'origine ed appartenente ad uno spazio vettoriale S_2 e lo moltiplichiamo per un numero reale n detto scalare, il prodotto w appartiene per l'assioma 1 allo spazio S_2 : $v_1 n = w \in S_2$

Tale prodotto è a sua volta un vettore di direzione e verso identici al vettore v_1 e di modulo pari a n volte quello di v_1 .

Se cambiamo lo scalare moltiplicativo con un altro numero reale m otterremo ancora un vettore z di stessa direzione e verso ma di modulo pari a m volte quello di v_1 .

I vettori v_1 , w e z sono quindi collineari e moltiplicando v_1 per tutti i numeri reali otterremo tutti i vettori collineari a v_1 dello spazio S_2 . Si verifica facilmente che l'insieme di questi vettori verifica tutti e dieci gli assiomi e pertanto può essere definito un sottospazio Q di S_2 .

4 – Generazione di uno spazio vettoriale

Chiediamoci in quale modo possiamo ottenere l'insieme di tutti i vettori appartenenti allo spazio vettoriale S_2 la cui dimensione per ora è 2.

Viene spontaneo prendere un vettore v_2 con direzione e verso diversi da quelli di v_1 ma con stesso modulo 1 e ripetere la moltiplicazione per tutti i numeri reali. Otterremo un altro sottospazio W di S_2 costituito da tutti i vettori collineari ma non paralleli a quelli del sottospazio Q .

Potremmo ora provare a sommare vettorialmente tutte le coppie ordinate possibili di elementi di Q e di W ottenendo un sottospazio T_2 di vettori ciascuno dei quali può essere descritto con la **combinazione lineare**:

$$v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

e quindi possiamo affermare che $T_2 = S_2$ perchè è costituito dall'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di v_1 e v_2 , ovvero da tutti i vettori di S_2 che giacciono sul piano di v_1 e v_2 che chiameremo **vettori generatori** di S_2 .

Se S_3 è uno spazio a tre dimensioni è evidente che abbiamo bisogno di un terzo vettore che non giaccia sul piano degli altri due per generare tutti gli elementi di S_3 mediante l'insieme delle combinazioni lineari del tipo

$$v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } v_1, v_2, v_3 \text{ generatori.}$$

e poichè non abbiamo imposto nessuna altra restrizione oltre quella della non collinearità per S_2 e della complanarità due a due per S_3 alla generazione dei due spazi di cui sopra, nulla ci vieta di prendere come generatori i versori degli assi coordinati.

Se S_n ha dimensione superiore a 3 i significati geometri adoperati sin qui cessano di avere significato e diremo che S_n viene definito dall'insieme delle combinazioni lineari dei suoi vettori generatori:

$$v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_n v_n \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \text{ generatori.}$$

Ma quali sono i vettori generatori ?

5 – Dipendenza e indipendenza lineare

In S_2 o S_3 se due vettori applicati nell'origine sono collineari essi sono reciprocamente generati dalla moltiplicazione per opportuni scalari, e poichè i vettori applicati nell'origine sono equivalenti a tutti gli altri vettori dello spazio cui appartengono che abbiano stessi modulo, direzione e verso, possiamo affermare che vettori tra di loro paralleli sono mutualmente e linearmente dipendenti da una moltiplicazione per opportuni scalari, ovvero che è possibile ottenere un vettore moltiplicandone uno qualsiasi ad esso parallelo (o collineare) per un opportuno scalare, ovvero che il prodotto di un vettore per uno scalare è sempre uguale al prodotto di un altro vettore per un altro scalare con i due scalari opportunamente scelti.

Ma questo ragionamento è ancora viziato dall'ancoraggio alla realtà rappresentabile e pertanto dobbiamo trovare una definizione per la dipendenza lineare che sia valida in generale per spazi vettoriali di qualunque dimensione.

Per quanto detto in precedenza noi abbiamo che

$$(5.1) \blacktriangleright x_1 v_1 = x_2 v_2 \Rightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \text{ con } x_1 \text{ e } x_2 \text{ opportunamente scelti}$$

il che deve essere letto nel senso che due vettori sono **linearmente dipendenti** o, più precisamente, che appartengono ad un insieme linearmente dipendente se **NON generano in maniera univoca il vettore nullo**.

Ad esempio, se $v_1 = 2v_2$ il vettore nullo sarà generato oltre che per valori degli scalari $x_1 = x_2 = 0$ anche per $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$ oppure per $x_1 = 1, x_2 = -2$ e così via per infinite coppie di valori.

Se la rappresentazione del vettore nullo è possibile solo con valori degli scalari pari a zero, si ha l'**indipendenza lineare**, che descrive la situazione opposta, ovvero quella di due di vettori che **generano in maniera univoca il vettore nullo** dove la (5.1) è quindi valida solo con $x_1 = x_2 = 0$ (rappresentazione banale del vettore nullo).

Poichè per definire la dipendenza e l'indipendenza lineare di vettori (di un insieme di vettori...) non abbiamo utilizzato postulati geometrici, tali definizioni sono generalmente valide per spazi vettoriali di dimensione qualsiasi purchè finita:

$$(5.2) \blacktriangleright x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

dove gli scalari x_1, x_2, \dots, x_n sono detti **coordinate** di v .

Poichè uno spazio vettoriale comprende sempre il vettore nullo, questa è la condizione più generale che noi abbiamo a disposizione per decidere della indipendenza o meno di un insieme di vettori.

Ma si dimostra che un insieme linearmente indipendente di n vettori genera in modo univoco, oltre al vettore nullo, anche ogni vettore dello spazio vettoriale S_n di cui tale insieme è sottospazio.

Se un vettore viene generato da due combinazioni lineari differenti

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = v_k$$

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n = v_k$$

si ha

$$v_1 (x_1 - y_1) + v_2 (x_2 - y_2) + \dots + v_n (x_n - y_n) = 0$$

ma poichè il vettore nullo è rappresentato in maniera univoca sarà

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n \text{ c.v.d.}$$

6 – Basi

Omettiamo per brevità le semplici dimostrazioni che supportano le affermazioni seguenti:

- ✓ Un insieme linearmente indipendente di n vettori è una **base** per lo spazio vettoriale S_n .
- ✓ Tale insieme non può contenere più di n vettori linearmente indipendenti e per questo è detto **insieme massimale** di elementi L.I.
- ✓ Una base **genera** lo spazio vettoriale S_n e quindi ogni suo vettore (incluso il vettore nullo) è rappresentato in modo univoco da una combinazione lineare di una sua base.
- ✓ Tale spazio può avere un **numero qualsiasi** di basi.
- ✓ Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno quindi lo **stesso numero n** di elementi.
- ✓ Per generare uno spazio vettoriale è sufficiente conoscere **solo una** delle sue basi.
- ✓ Se una base genera S_n essa genera anche ogni suo **sottospazio**.
- ✓ Se una base genera un **sottospazio** di S_n non necessariamente essa genera S_n e non può avere un numero di elementi maggiore di n .
- ✓ Qualsiasi **sottoinsieme di una base** è L.I.

Se una base di S_n è costituita esclusivamente da vettori unità essa si chiama **base canonica**.

Se una base di \mathcal{S}_n è costituita esclusivamente da vettori tali che, per $i \neq j$ si ha $(v_i v_j) = 0$, essa si chiama **base ortogonale**.

Una base canonica e ortogonale assieme è detta **base ortonormale**.

Per quanto sopra esposto una qualsiasi ennupla ordinata, diciamo $v_4 = (3, 11, -9, 75)$ in \mathcal{S}_4 , può essere considerata come combinazione lineare $v_4 = 3(1, 0, 0, 0) + 11(0, 1, 0, 0) - 9(0, 0, 1, 0) + 75(0, 0, 0, 1)$ della base canonica $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ di \mathcal{S}_4 .

Ma v_4 può essere espresso come combinazione lineare di qualunque base di \mathcal{S}_4 .

► **Esempio.** Sia la base $(2, 5, -5, 8), (11, 23, -1, 0), (2, 2, 3, 3), (-5, 6, 7, 2)$ in funzione della quale calcolare le nuove coordinate di v_4

$$(3, 11, -9, 75) = a(2, 5, -5, 8) + b(11, 23, -1, 0) + c(2, 2, 3, 3) + d(-5, 6, 7, 2)$$

Da questa relazione lineare nasce un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} 3 = 2a + 11b + 2c - 5d \\ 11 = 5a + 23b + 2c + 6d \\ -9 = -5a - 1b + 3c + 7d \\ 75 = 8a + 0 + 3c + 2d \end{cases}$$

Il determinante della matrice incompleta del sistema è uguale a 8831 e con la regola di Cramer troviamo le coordinate cercate

$$a = \frac{60823}{8831}, b = -\frac{15450}{8831}, c = \frac{54121}{8831}, d = \frac{6689}{8831}$$

da cui

$$v_4 = \frac{60823}{8831} \cdot (2, 5, -5, 8) - \frac{15450}{8831} (11, 23, -1, 0) + \frac{54121}{8831} (2, 2, 3, 3) + \frac{6689}{8831} (-5, 6, 7, 2)$$

Verifichiamo la prima coordinata lasciando le altre al lettore

$$\frac{60823}{8831} \cdot 2 - \frac{15450}{8831} \cdot 11 + \frac{54121}{8831} \cdot 2 + \frac{6689}{8831} \cdot (-5) = 3$$

Da questo esempio si può capire qual'è il lavoro da fare se in \mathcal{S}_4 abbiamo *due basi non canoniche* B_1 e B_2 e si vuole passare, ad esempio, da B_1 a B_2 :

1. Passare dalla base B_1 alla base canonica
2. Passare dalla base canonica alla base B_2

Ovviamente procedere all'inverso $B_2 \rightarrow$ Canonica $\rightarrow B_1$ se si vuole passare da B_2 a B_1 .

► **Esempio.** Siano le basi

C = base canonica

$$B_1 = (1, 3, 4, 8), (2, -2, 5, 1), (1, 1, 1, 9), (-1, 1, 2, 2)$$

$$B_2 = (3, 1, 3, -2), (2, -1, -2, -1), (4, 5, 0, -1), (-1, 2, 1, 1)$$

sia inoltre il vettore $v_4 = (2, 1, 3, 5)$ espresso in B_1 da esprimere in B_2 .

$$B_1 \rightarrow C: (a, b, c, d) = 2(1, 3, 4, 8) + 1(2, -2, 5, 1) + 3(1, 1, 1, 9) + 5(-1, 1, 2, 2) \rightarrow (2, 12, 26, 54)$$

$$C \rightarrow B_2: (2, 12, 26, 54) = a(3, 1, 3, -2) + b(2, -1, -2, -1) + c(4, 5, 0, -1) + d(-1, 2, 1, 1); \rightarrow (90, 350, -128, 456)$$

Ora facciamo la prova con $v_4 = (90, 350, -128, 456)$ espresso in B_2 da esprimere in B_1 .

$$B_2 \rightarrow C: (a, b, c, d) = 90(3, 1, 3, -2) + 350(2, -1, -2, -1) - 128(4, 5, 0, -1) + 456(-1, 2, 1, 1) \rightarrow (2, 12, 26, 54)$$

$$C \rightarrow B_1: (2, 12, 26, 54) = a(1, 3, 4, 8) + b(2, -2, 5, 1) + c(1, 1, 1, 9) + d(-1, 1, 2, 2) \rightarrow (2, 1, 3, 5)$$

7 – Matrici di vettori

Per verificare l'indipendenza o meno di insiemi di vettori è assai comodo ricorrere alle matrici di vettori ed eseguire questa verifica col **calcolo del determinante**.

Le matrici di vettori, come i vettori stessi, sono oggetti matematici che è possibile sommare tra di loro e moltiplicare per uno scalare e formano degli spazi lineari per i quali sono validi i dieci assiomi.

E rappresentando esse degli insiemi di vettori (**vettori-riga** o **vettori-colonna**), ossia oggetti

matematici che è possibile sommare tra di loro e moltiplicare per uno scalare, sulle righe o sulle colonne separatamente è possibile eseguire queste operazioni.

Operazioni elementari sulle righe:

- > scambiare tra loro due righe;
- > sommare o sottrarre ad una riga un'altra riga o la somma di due o più righe;
- > moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero;
- > sommare o sottrarre da una riga un'altra riga moltiplicata per uno scalare diverso da zero.

► **Esempio.** Siano dati tre vettori in \mathcal{S}_3 , stabilire se sono o meno L.I.

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,1)$$

Scriviamoli come vettori-colonna nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dalla quale è evidente che nessuno dei tre vettori-colonna può essere ottenuto dagli altri due con operazioni elementari sulla matrice.

Tanto basterebbe a stabilire, come è banalmente evidente, che i tre vettori sono L.I.

Ma questa verifica diretta non è sempre agevole e allora ricorrendo alla condizione di indipendenza dei tre vettori espressa da

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(1,1,1) = 0 \text{ con le tre coordinate tutte nulle}$$

si otterrà il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 0 + x_3 = 0 \\ 0 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 + 0 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che avrà come soluzione unica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Ma un sistema omogeneo ha soluzione banale se il determinante dei coefficienti è diverso da zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e pertanto il lavoro necessario per stabilire l'indipendenza o la dipendenza di un insieme di vettori si riduce al calcolo del determinante delle loro coordinate. In questo caso particolare la matrice delle coordinate è triangolare e quindi il valore del determinante è immediato ed uguale al prodotto degli elementi della diagonale ovvero 1. Inoltre, la matrice è anche ortogonale perchè i tre vettori costituiscono una base ortogonale per \mathcal{S}_3 .

► **Esempio.** Sempre in \mathcal{S}_3 , per i vettori

$$v_1 = (1,2,3), v_2 = (-2,0,-4), v_3 = (-3,2,-5)$$

abbiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 1(0+8) + 2(-10-6) - 3(-8-0) = 0$$

dal quale con un calcolo molto semplice possiamo stabilire che esso è nullo e i tre vettori sono L.D.

Dai due esempi precedenti si conclude che data una qualunque matrice se il suo determinante è uguale a zero sia i vettori-colonna sia i vettori-riga sono L.D. e che essi sono L.I. se tale determinante è diverso da zero.

Notare come ottenere la verifica mediante operazioni elementari sulla matrice non sia altrettanto immediato come nel caso precedente. Infatti il terzo vettore-colonna si ottiene aggiungendo al primo il secondo moltiplicato per 2.

E se consideriamo i tre vettori

*La definizione corretta è:
 "Una matrice A è ortogonale se $AA^T = I$ ".
 Ma ciò è sempre vero per matrici che
 rappresentano basi ortogonali, perciò il nome.*

$$v_1 = (1, -2, -3), v_2 = (2, 0, 2), v_3 = (3, -4, -5)$$

la cui matrice è la trasposta della precedente, si verifica con più difficoltà che i vettori sono ancora L.D. in quanto il secondo vettore-colonna si ottiene aggiungendo al primo moltiplicato per -4 il terzo moltiplicato per 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1(0+8) - 2(10-12) + 3(-4-0) = 0$$

Possiamo stabilire se un insieme di vettori è o meno L.I. applicando il

Teorema del rango:

“Il rango di una matrice A di vettori esprime il numero massimo di vettori-colonna o vettori-riga L.I. ovvero l’ordine massimo di un minore di A diverso da zero.”

La dimostrazione è nel paragrafo 9.

► **Esempio.** Siano dati in \mathcal{S}_3 quattro vettori tra i quali si vuole individuare una base:

$$v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (1, -4, 11), v_3 = (2, 0, -2), v_4 = (-6, 2, 0)$$

Procediamo dapprima con quanto appreso sin qui (1) e poi verifichiamo il risultato applicando il teorema del rango (2).

1) I quattro vettori sono sicuramente L.D. in quanto una base di \mathcal{S}_3 non può avere più di 3 elementi ed una base è un insieme massimale di elementi L.I. Proviamo a verificare se esiste una base composta da tre di questi elementi.

Scriviamo il determinante della matrice A dei vettori

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 11 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

e calcoliamo i determinanti di tutti i minori di ordine 3 per verificare se ce ne sono di diversi da zero; in caso affermativo avremmo trovato uno o più gruppi di tre vettori L.I. e quindi una o più basi di \mathcal{S}_3 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 11 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tutti i determinanti dei minori di ordine 3 sono uguali a zero, quindi non esiste un insieme di tre elementi L.I. e non è possibile ricavare una base di \mathcal{S}_3 con i vettori dati.

2) Consideriamo il determinante del minore di ordine 2 che è diverso da zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

e poi i suoi orlati che sono uguali a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema degli orlati:

“Data una matrice arbitraria $A \in M_{m,n}$ se esiste un minore di A di ordine p con determinante diverso da zero tale che i suoi orlati di ordine $p + 1$ abbiano determinante nullo, allora $r(A) = p$ ”.

In forza di tale teorema allora risulta che il rango della matrice A dei vettori dati è 2, che il massimo numero di elementi L.I. è 2 e che pertanto non è possibile ricavare una base di \mathcal{S}_3 con i vettori dati.

8 - Dipendenza e indipendenza lineare con i determinanti

Riassumendo:

✓ In una matrice $A_{n,n}$ n vettori sono L.D. se il determinante della loro matrice è uguale a zero.

✓ Viceversa, essi sono L.I. se tale determinante è diverso da zero.

Partendo dalla definizione assiomatica di determinante di una matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

si estraggono le corrispondenze

✓ $\det(A) = 0 \rightarrow$ vettori proporzionali ossia L.D.

✓ $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ vettori non proporzionali ossia L.I.

Ciò è stato dimostrato nel paragrafo precedente, ma possiamo seguire un percorso diverso ed interessante che lega calcolo del determinante e calcolo della dipendenza o indipendenza lineare.

Lavoriamo per semplicità in \mathbb{R}^3 , ma quanto esporremo è valido ovviamente anche in \mathbb{R}^n .

→ Prodotto scalare di vettori

Definiamo *prodotto scalare di due vettori* $\mathbf{v}_1 = (a,b,c)$ e $\mathbf{v}_2 = (d,e,f)$ il numero reale $n = (ad + be + cf)$.

Ricordiamo l'importante *disuguaglianza di Schwarz* che riguarda il prodotto scalare

$$(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2)$$

la cui semplice dimostrazione tralasciamo e che occorre per la dimostrazione del prodotto vettoriale.

→ Prodotto vettoriale di vettori

Definiamo *prodotto vettoriale di due vettori* $\mathbf{v}_1 = (a,b,c)$ e $\mathbf{v}_2 = (d,e,f)$ un *terzo vettore*

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = (bf-ce, cd-af, ae-bd).$$

Si dimostra:

1. che \mathbf{v}_3 è ortogonale al piano sul quale giacciono \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e che quindi i tre vettori sono L.I.;
2. ogni altro vettore ortogonale a tale piano è proporzionale a \mathbf{v}_3 (collineare o parallelo).

1) Poichè \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono L.I. il loro prodotto vettoriale \mathbf{v}_3 deve essere diverso da zero.

Allora esisteranno tre scalari per la combinazione lineare $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = 0$.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v}_3 si ha $a\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 + b\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + c\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3 = 0$ dove, essendo \mathbf{v}_3 ortogonale a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , sarà $a\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 = 0$ e $b\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = 0$ e quindi lo scalare c dovrà essere nullo.

La combinazione lineare si ridurrà allora a $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = 0$ nella quale, essendo \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 L.I., dovrà essere $a = b = 0$. E' quindi dimostrato che \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 sono L.I.

2) Sia \mathbf{v}_n un qualsiasi vettore ortogonale a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

Dimostrando che $(\mathbf{v}_n\mathbf{v}_3)^2 = (\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n)(\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3)$ per la disuguaglianza di Schwarz sarà dimostrato che \mathbf{v}_n e \mathbf{v}_3 sono proporzionali.

Poichè \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 sono L.I. essi generano tutto \mathbb{R}^3 e quindi \mathbf{v}_3 potrà essere descritto dalla combinazione lineare $\mathbf{v}_n = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$ per tre opportuni scalari.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v}_n si ha $\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3)$.

Ma $\mathbf{v}_n\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_n\mathbf{v}_2 = 0$ e quindi $\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n = c\mathbf{v}_n\mathbf{v}_3$.

Inoltre, poichè $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 = 0$ si avrà $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_3(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3) = c\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3$.

Siamo alla fine della dimostrazione:

$$(\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n)(\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3) = (c\mathbf{v}_n\mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_n\mathbf{v}_3)(c\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_n\mathbf{v}_3)^2$$

Ora esprimiamo le tre componenti del prodotto vettoriale mediante tre matrici e moltiplichiamone i determinanti per i versori degli assi coordinati $w_x = (1, 0, 0)$, $w_y = (0, 1, 0)$, $w_z = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \left(w_x \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, w_y \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, w_z \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)$$

Teniamo in caldo questa scrittura e, con i due prodotti a disposizione, produciamone un terzo:

→ Prodotto misto di vettori

Definiamo *prodotto misto di tre vettori* $\mathbf{v}_1 = (a,b,c)$, $\mathbf{v}_2 = (d,e,f)$ e $\mathbf{v}_4 = (g,h,i)$ il numero reale

$$\mathbf{n} = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$$

Naturalmente, trattandosi di un prodotto scalare esso è commutativo: $\mathbf{n} = \mathbf{v}_4(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$

Utilizzando la scrittura precedente otteniamo

$$n = v_4 \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

da cui, scambiando tra di loro le colonne del determinante centrale

$$n = v_4 \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

otteniamo lo sviluppo di un determinante del terzo ordine col secondo teorema di Laplace

Secondo teorema di Laplace:

“Il determinante di una matrice quadrata è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna per i rispettivi complementi algebrici $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.”

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = n$$

Ora, il prodotto misto $\mathbf{n} = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_4$ è uguale a zero se i vettori $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_4 sono ortogonali. Ma se \mathbf{v}_4 è ortogonale a \mathbf{v}_3 allora esso è complanare a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e ciò significa che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 sono L.D. Diversamente se il prodotto misto è diverso da zero i tre vettori saranno L.I. Abbiamo così dimostrato le due proposizioni iniziali.

9 – Trasformazioni lineari e matrici associate

Ora cercheremo di approfondire le ragioni per le quali ha senso rappresentare un insieme di vettori con una matrice piuttosto che col cartellone del gioco dell’oca.

Siano V_n e W_m due spazi lineari di dimensioni finite rispettivamente n ed m con basi v_1, v_2, \dots, v_n e w_1, w_2, \dots, w_m .

La trasformazione lineare $T: V_n \rightarrow W_m$ genera una ed una sola **matrice associata** $M_{n,m}$ i cui vettori colonna sono le coordinate degli elementi $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n) \in W_m$ rispetto alla base w_1, w_2, \dots, w_m .

Infatti il generico elemento $T(v_k) \in W_m$ si rappresenta mediante combinazione lineare rispetto alla

base di W_m , ovvero $T(v_k) = \sum_{i=1}^m c_{ik} w_i$ dove le c_{ik} sono le coordinate dell’elemento in questione.

Viceversa, data una matrice $M_{n,m}$ e due basi v_1, v_2, \dots, v_n e w_1, w_2, \dots, w_m per V_n e W_m esiste una ed una sola trasformazione lineare $T: V_n \rightarrow W_m$ associata a tale matrice.

► **1° Esempio.** Siano le basi $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ di V e $(2,1,0), (0,-1,1), (1,1,0)$ di W e sia la trasformazione $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$. Allora avremo

$$\begin{aligned} (2,0,0) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (2,0,-2) \\ (0,2,0) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (-2,0,4) \\ (0,0,2) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (-2,2,4) \end{aligned} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice associata contiene tutte le informazioni atte a descrivere la trasformazione in funzione delle basi scelte e quindi permette di ricostruire tale trasformazione se non la si conosce.

Si dimostra infatti (ma non lo facciamo) che $T(\mathbf{X}) = \mathbf{M}\mathbf{X}$.

Sia il vettore $\mathbf{X} = (3,-7,11)$ di V ; nel nostro esempio avremo che

$$T(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Per verificare che la trasformazione cui è associata \mathbf{M} è proprio $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ è necessario esprimere \mathbf{X} (attualmente in base ortogonale) in funzione della base di W

$$(3,-7,11) = a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (-1,11,5)$$

► **2° Esempio.** Sia $(2,1,0)$, $(0,-1,1)$, $(1,1,0)$ la base di V , quella di W sia la base ortogonale e la trasformazione sia la trasformazione identità. Allora sarà

$$\begin{aligned} (2,1,0) &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \rightarrow (2,1,0) \\ (0,-1,1) &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \rightarrow (0,-1,1) \\ (1,1,0) &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \rightarrow (1,1,0) \end{aligned} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e per il vettore $X = (3,-7,11)$ di V sarà

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esprimendo il vettore $T(X)$ (attualmente in base ortogonale) in funzione della base di V
 $(17,21,-7) = a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (3,-7,11)$

proviamo che la trasformazione è $T(x) = x$.

Se le basi di V e W sono ambedue ortogonali e la trasformazione è la trasformazione identità, la matrice associata sarà la matrice identità.

► **3° Esempio.** Se nessuna delle due basi è una base ortogonale la prova si complica leggermente. Siano le basi $(1,-1,1)$, $(2,4,1)$, $(3,0,3)$ di V e $(2,1,0)$, $(0,-1,1)$, $(1,1,0)$ di W e sia la trasformazione $T(x) = 3x$. Allora avremo

$$\begin{aligned} (3,-3,3) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (3,3,-3) \\ (6,12,3) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (-9,3,24) \\ (9,0,9) &= a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (0,9,9) \end{aligned} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -3 & 24 & 9 \end{pmatrix}$$

e per il vettore $X = (3,-7,11)$ di V sarà

$$T(X) = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -3 & 24 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 87 \\ -78 \end{pmatrix}$$

Ora esprimiamo X (attualmente in base *non* ortogonale) prima in base ortogonale e poi nella base di W

$$(a,b,c) = 3(1,-1,1) - 7(2,4,1) + 11(3,0,3) \rightarrow (22,-31,29)$$

$$(22,-31,29) = a(2,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,0) \rightarrow (24,29,-26)$$

ed ecco provato che la trasformazione è $T(x) = 3x$.

Ovviamente lo stesso risultato si ottiene esprimendo $T(x)$ prima in base ortogonale e poi nella base di V

$$(a,b,c) = 72(2,1,0) + 87(0,-1,1) - 78(1,1,0) \rightarrow (66,-93,87)$$

$$(66,-93,87) = a(1,-1,1) + b(2,4,1) + c(3,0,3) \rightarrow (9,-21,33)$$

10 – Teorema del rango

Si dimostra il *'teorema della nullità più rango'* (Null-Rank theorem).

Data una trasformazione lineare

$$T: V \rightarrow W$$

si dimostra che la dimensione dello spazio lineare V è uguale alle dimensione del nucleo di T (*nullità*) più la dimensione del codominio di T (*rango*).

$$(10.1) \blacktriangleright \dim V = \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Img}(T)$$

Sia dato uno spazio lineare V_n di dimensione n .

Supponiamo di avere una base $B = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ per il nucleo $\text{Ker}(T)$ con $k \leq n$.

Poichè v_1, v_2, \dots, v_k sono L.I. allora deve esistere una base di V_n che contenga v_1, v_2, \dots, v_k ,

$A = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+r})$ dove necessariamente deve essere $k + r = n$.

Poichè la dimensione di una base coincide col numero dei suoi elementi e con la dimensione dello spazio cui appartiene, se dimostriamo che $C = (T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r}))$ è una base di $\text{Img}(T)$, avremo anche dimostrato che $\dim A = \dim B + \dim C$ ovvero la (10.1).

Per far ciò è necessario dimostrare che gli elementi di C sono L.I. e generano $\text{Img}(T)$.

Gli elementi di C generano $\text{Img}(T)$. →

Dato un elemento qualsiasi $x \in V$ la sua immagine in $\text{Img}(T)$ sarà $y = T(x)$.

Possiamo scrivere l'elemento x come combinazione lineare della base A :

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_{k+r} v_{k+r}$$

Mandando x da V in W tramite T allora abbiamo:

$$y = \sum_{i=1}^k c_i T(v_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(v_i)$$

ma poichè B è una base di $\text{Ker}(T)$ sarà $\sum_{i=1}^k c_i T(v_i) = 0$ e quindi $y = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(v_i)$

Poichè y è un elemento qualsiasi di $\text{Img}(T)$ è dimostrato che gli elementi di C generano $\text{Img}(T)$
Gli elementi di C sono L.I. \rightarrow

Supponiamo che si abbia $\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(v_i) = 0$ per opportuni scalari.

Per la linearità della trasformazione segue che $T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i v_i\right) = 0$ e che quindi l'elemento

$$x = c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_{k+r} v_{k+r} \text{ appartiene a } \text{Ker}(T).$$

Ma anche $x = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ appartiene a $\text{Ker}(T)$ per cui non possiamo che concludere che

$$x - x = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i v_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i v_i = 0$$

Ma poichè $A = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+r})$ è una base, tutti gli scalari c_i devono essere nulli e quindi tutti gli elementi di $C = (T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r}))$ sono L.I.

11 – Il teorema del rango più nullità applicato alle matrici

Come visto in precedenza ogni trasformazione lineare genera una matrice associata $M_{n,m}$ i cui vettori-colonna sono gli elementi di $\text{Img}(T)$. Se la trasformazione è la trasformazione identità si ha $\dim \text{Ker}(T) = 0 \Rightarrow \dim(V) = \dim \text{Img}(T)$

e pertanto il massimo numero di vettori-colonna (o vettori-riga) L.I. della matrice sarà dato dal rango della matrice stessa: $r(M) = \dim \text{Img}(T)$.

12 - Esercizi svolti

(12.1) ► Stabilire quale terna di vettori costituisce una base per \mathbb{R}_3 e spiegare dettagliatamente per quale motivo le altre due non lo sono.

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,1)$$

$$v_1 = (2,0,-1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (2,-1,-1)$$

$$v_1 = (7,-2,6), v_2 = (-2,-2,2), v_3 = (3,-6,10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Dei determinanti delle tre matrici di vettori solo quello della matrice A è diverso da zero; pertanto i suoi vettori-colonna sono L.I. ed essendo in numero di tre formano una base per \mathbb{R}_3 .

Nelle matrici B e C ci sono vettori proporzionali e quindi le due terne di vettori sono L.D. e non possono costituire una base per \mathbb{R}_3 :

- nella matrice B la prima riga è uguale alla terza moltiplicata per -2;

- nella matrice C l'ultima colonna si ottiene dalla somma della prima con la seconda moltiplicata per due.

(12.2) ► Stabilire se i vettori-colonna dati nelle quattro matrici A, B, C, D sono una base per \mathbb{R}_5 e nel caso non lo siano stabilire se è possibile escluderne alcuni per ottenere un insieme L.I.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 23 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \det B = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 23 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \det C = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 23 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Le matrici A, B sono triangolari, una è la trasposta dell'altra, i loro determinanti sono uguali e diversi da zero, i vettori sono L.I. e costituiscono una base per \mathbb{R}_5 . I loro determinanti rimangono diversi da zero anche riducendo il numero dei vettori-colonna e ciò prova che qualsiasi sottoinsieme di un insieme massimale di elementi L.I. è a sua volta L.I., ma escludendo uno o più vettori la matrice non è più né quadrata né triangolare e quindi il determinante non può più essere calcolato come prodotto degli elementi della diagonale.

La matrice C è triangolare e il suo determinante è nullo e quindi i vettori sono L.D. Ciò prova che un insieme di vettori che comprenda il vettore nullo è L.D.

La matrice D è diagonale, il suo determinante è diverso da zero, i vettori sono L.I. e costituiscono la base canonica di \mathbb{R}_5 . D è inoltre una matrice a blocchi 2x2 e 3x3 il cui determinante è uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi che sono basi ortogonali per \mathbb{R}_2 e \mathbb{R}_3 .

Si rifletta sul fatto che definire 'ortogonale' la base con i vettori di D non ha significato trattandosi di uno spazio vettoriale con dimensione maggiore di tre, mentre lo ha per le basi costituite dai vettori dei due blocchi.

(12.3) ► Stabilire se tra i vettori-colonna della matrice A ce ne sono 4 per una base in \mathbb{R}_4 e in caso affermativo determinare le coordinate del vettore $v = (1, 0, 1, 1)$ rispetto alla base.

Ricordiamo che una ennupla rappresenta le coordinate di un vettore rispetto alla base canonica e che pertanto se riferite ad una base diversa tali coordinate vanno opportunamente cambiate.

a) Eseguiremo dapprima operazioni elementari sulle righe per stabilire se il rango della matrice dei vettori è 4 e se pertanto essi formano una base per \mathbb{R}_4 .

I numeri romani indicano le righe e quelli arabi gli scalari moltiplicativi. Sia la matrice di vettori A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 1 & 16 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II-I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 1 & 16 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III-2I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{(IV-4I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(IV-2II)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2IV)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(IV+3III)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice risultante è equivalente per righe a quella data e il numero dei pivot è 4.

Poichè per il teorema del rango si ha che:

numero di pivot = rango per righe = vettori-riga L.I. = rango per colonne = vettori-colonna L.I.

il rango della matrice sarà 4, il numero di vettori-colonna L.I. sarà 4 e sarà possibile costruire due basi per \mathbb{R}^4 ciascuna formata dai primi tre vettori-colonna ed uno dei due restanti.

Infatti, le matrici 4x4 dei vettori così formate sono ambedue triangolari con determinante diverso da zero immediatamente ottenibile dal prodotto degli elementi della diagonale.

Ma ciò è vero anche per le matrici 4x4 ricavate nello stesso modo dalla matrice di partenza ?

Affermativo, perchè le due matrici sono equivalenti per righe (se avessimo eseguito le operazioni elementari sulle colonne avremmo ottenuto due matrici equivalenti per colonne e i risultati sarebbero stati gli stessi. Non dimentichiamo infatti che per matrici quadrate si ha $\det(A) = \det(A^T)$. Verifichiamo se i loro determinanti sono diversi da zero.

Numeriamo i vettori-colonna della matrice A da sinistra a destra v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , ed eseguiamo una verifica sui determinanti delle due matrici 4x4.

Per la matrice composta dai vettori-colonna v_1, v_2, v_3, v_4 il determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ 4 & 10 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 10 & -9 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -9 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(3 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} \right) - 2 \left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} \right) -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (15-30-4)-2(5-10+2)-(-6+6-4)-(4+6-20) = 1$$

Lasciamo al lettore di buona volontà verificare che il determinante della matrice composta dai vettori-colonna v_1, v_2, v_3, v_5 è uguale a 2.

b) Ora dobbiamo trovare le coordinate del vettore $v = (1, 0, 1, 1)$ rispetto alle due basi disponibili e quindi scriviamo le relazioni vettoriali

$$(1, 0, 1, 1) = a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = a(1, 1, 2, 4) + b(2, 3, 4, 10) + c(-1, -5, -4, -9) + d(1, -1, 1, 1)$$

$$(1, 0, 1, 1) = a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_5 = a(1, 1, 2, 4) + b(2, 3, 4, 10) + c(-1, -5, -4, -9) + d(8, 9, 16, 33)$$

per le quali otteniamo i due sistemi lineari di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} a + 2b - c + d = 1 \\ a + 3b - 5c - d = 0 \\ 2a + 4b - 4c + d = 1 \\ 4a + 10b - 9c + d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b - c + 8d = 1 \\ a + 3b - 5c + 9d = 0 \\ 2a + 4b - 4c + 16d = 1 \\ 4a + 10b - 9c + 33d = 1 \end{cases}$$

che forniscono come soluzioni le coordinate richieste:

$$a = -\frac{72}{17}, b = \frac{1}{17}, c = -\frac{26}{17}, d = \frac{61}{17}$$

$$a = -\frac{91}{2}, b = -\frac{3}{10}, c = -\frac{17}{10}, d = \frac{61}{10}$$

(12.4) ► Dimostrare che i vettori-colonna della matrice A^T , trasposta della matrice A dell'esercizio precedente, non possono costituire una base per \mathbb{R}_5 ma che essi sono L.I.

Dimostrare inoltre che sopprimendo l'ultima riga di A^T i nuovi vettori-colonna formano una base per \mathbb{R}_4 .

a) Ricordiamo che in una matrice trasposta si scambiano i vettori-colonna con i vettori-riga e pertanto nel caso in oggetto si passa da una matrice 4×5 ad una matrice 5×4 . Quindi quattro vettori non possono costituire una base per uno spazio vettoriale di dimensione 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 1 & 16 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ -1 & -5 & -4 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 16 & 33 \end{pmatrix}$$

Per il teorema del rango si ha $r(A) = r(A^T)$ e quindi il numero di vettori-colonna L.I. è sempre 4. Possiamo avere una conferma di ciò ricordando che per matrici rettangolari si ha $\det(A^T) = k \det(A)$ con k reale diverso da zero ed essendo $\det(A) \neq 0$ sarà $\det(A^T) \neq 0$. Pertanto i quattro vettori-colonna di A^T sono L.I.

b) Sopprimere l'ultima riga di A^T equivale a sopprimere l'ultima colonna di A e pertanto A^T diventa la trasposta di una matrice 4×4 i cui vettori-colonna sono L.I. Le due matrici 4×4 hanno sempre rango 4 in quanto sopprimendo l'ultima colonna di A il numero di pivot non cambia. Inoltre per le matrici quadrate si ha $\det(A) = \det(A^T) \neq 0$ e quindi i nuovi quattro vettori-colonna formano una base per \mathbb{R}_4 .

(12.5) ► Calcolare per quale valore del parametro reale k è possibile ottenere una base per \mathbb{R}_3 dai vettori-colonna della matrice A e stabilire quale è tale base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo subito che abbiamo a disposizione un minore di ordine 2 privo di parametro con determinante diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Ciò significa che $r(A) \geq 2$ e che se i determinanti degli orlati sono tutti nulli esisterà sicuramente una base per \mathbb{R}_3 per valori del parametro reale diversi da quello per il quale gli orlati risultano nulli.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix}, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$M_1 = (-k + 1) - (-1 + k) + 2(1 - k^2) = -2(k^2 + k - 2) = -2(k - 1)(k + 2)$$

$$M_2 = (-1 + 1) - k(-1 + k) + 2(1 - k) = -(k^2 + k - 2) = -(k - 1)(k + 2)$$

$$\text{da cui il sistemino } \begin{cases} -2(k - 1)(k + 2) = 0 \\ -(k - 1)(k + 2) = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni $k = 1$ e $k = -2$

Si conclude che per tali valori del parametro reale il rango della matrice è 2, mentre è 3 per qualunque altro valore e che quindi esistono basi per \mathbb{R}_3 formate dai vettori-colonna degli orlati per valori di $k \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$.

(12.6) ► Data la matrice A di vettori-riga appartenenti a \mathbb{R}_4 , determinare per quale/i valori del parametro reale k essi costituiscono una base di \mathbb{R}_4 e determinare come varia la dimensione del sottospazio \mathcal{Q} al variare di k .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se k vale zero allora abbiamo due righe uguali e deve essere $r(A) < 4$; ma abbiamo anche un minore di ordine 3 diverso da zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e pertanto $r(A) = 3$ e tale è la dimensione di \mathcal{Q} .

Se invece k è diverso da zero si ha $\det(A) = 2k^2$ e $r(A) = 4$. Quindi i vettori dati sono L.I. e costituiscono una base per $\mathcal{Q}_4 = \mathbb{R}_4$ per qualsiasi valore di k diverso da zero.

(12.7) ► Data la matrice di vettori-riga A verificare se essi sono L.I. e in caso affermativo trovare altri due vettori che assieme ai tre dati formino una base per \mathbb{R}_5 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambiando tra loro le due ultime righe si ottiene una matrice con 3 pivot e quindi di rango 3 e pertanto i vettori-riga dati sono L.I.

$$A_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{5,5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ottenere una base per \mathbb{R}_5 è cosa semplicissima in quanto basta completare la matrice equivalente per righe con due vettori-riga scelti nella base canonica (vettori unità) in modo da portare i pivot a 5.

(12.8) ► Dimostrare rapidamente che i vettori-riga della matrice A sono L.D. Spiegare, senza eseguire calcoli, per quale motivo sono L.D. anche i vettori-colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

La matrice A è una matrice a blocchi. Il determinante del blocco 2×2 è uguale a -2 . Il determinante del blocco 4×4 ha un minore di ordine 2 diverso da zero e orlati di ordine 3 tutti nulli e pertanto vale zero. Quindi si ha $\det(A) = -2 \cdot 0 = 0$ e i vettori-riga di A sono L.D.

I vettori colonna sono anch'essi L.D. perchè A è quadrata e quindi $\det(A) = \det(A^T)$ (anche A^T è una matrice a blocchi.).

(12.9) ► Dimostrare molto rapidamente che i vettori-riga del tabellone della tombola sono L.D.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \dots & 20 \\ 21 & 22 & 23 & \dots & 30 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 90 \end{pmatrix}$$

Ogni riga si ottiene moltiplicando la successiva per 2 e sottraendogli la successiva ancora:

$$I = 2II - III, II = 2III - IV, \text{ ecc.}$$

Oppure sommando le due successive e sottraendo la successiva ancora:

$$I = II + III - IV, \text{ ecc.}$$

Quindi i pivot della matrice equivalente per righe sono 2, il rango del tabellone della tombola è 2 e 2 sono i vettori-riga L.I.

■
Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math