

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 1

Alcuni metodi di risoluzione ed esercizi svolti su equazioni del primo ordine

Prima parte

di Leonardo Calconi

07.12.2007

Premessa

Un'equazione differenziale del primo ordine in una incognita è un'equazione nella quale tale incognita è una funzione. Per tale motivo è detta da alcuni *equazione funzionale*.

L'equazione può essere esplicita o esplicitabile nella derivata

$$y' = f(x, y)$$

oppure essere descritta in modo implicito

$$F(x, y, y') = 0$$

Il processo risolutivo potrà portare ad una soluzione in forma esplicita

$$y = \varphi(x, C)$$

o in forma implicita

$$\phi(x, y, C) = 0$$

ed in ogni caso in tale processo ad un certo punto si dovrà necessariamente integrare per togliere di mezzo la derivata ed ottenere così in una delle due forme la funzione incognita.

Poiché con l'integrazione entra in ballo una costante arbitraria C la soluzione generale trovata, detta *integrale generale*, rappresenta non una curva ma una famiglia di curve ciascuna delle quali dipende dal valore attribuito alla costante C .

Una soluzione particolare, detta *curva integrale*, è data stabilendo delle condizioni iniziali

$(x = x_0, y = y_0)$ e rappresenta l'unica curva della famiglia ($C = C_0$) passante per il punto (x_0, y_0) .

Se l'equazione è esplicita o facilmente esplicitabile nella derivata ed il secondo membro è esprimibile nella sola x , si dice che essa si presenta in *forma normale* con le variabili già separate

$$y' = \cos x + 2x$$

In tal caso per trovare la soluzione si procede con l'integrazione diretta

$$\int dy = \int (\cos x + 2x) dx + C \Rightarrow y = \sin x + x^2 + C$$

In generale però l'equazione non è esplicita nella derivata e le variabili non sono separate.

Talvolta è possibile ridurla in forma normale con semplici operazioni algebriche

$$yy' = -x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \int y dy = -\int x dx + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2 + x^2 = 2C = C^2$$

e talvolta è possibile separare le variabili ma non esplicitare l'equazione nella derivata

$$xyy' = 1 - x^2 \Rightarrow y dy = \frac{1 - x^2}{x} dx \Rightarrow \int y dy = \int \frac{1 - x^2}{x} dx + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{2 \ln|x| - x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \ln|x| + C$$

In equazioni di complessità superiore non è possibile separare le variabili ed è necessario impiegare procedimenti di sostituzione il cui principio è quello di trasformare l'equazione, tramite la sostituzione, in equazione a variabili separabili per poi separare, sostituire di nuovo ed integrare.

Non è possibile individuare metodi generali di sostituzione e pertanto ogni equazione andrà affrontata come problema a se stante cercando di intuire le trasformazioni algebriche alle quali può essere sottoposta e le opportune sostituzioni che possano portare ad una sua forma normale.

Pur tuttavia esistono metodi di sostituzione che permettono di standardizzare il processo risolutivo per alcuni tipi di equazioni.

In questa prima parte nel primo paragrafo sono svolti degli esercizi con equazioni a variabili separabili mentre nei paragrafi successivi gli esercizi riguarderanno metodi di sostituzione per equazioni a variabili non separabili.

Equazioni a variabili separabili

(1.1) ► $xy' + y = y^2$

Separiamo le variabili

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow y' + \frac{1}{x}(y - y^2) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{(y - y^2)} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x}$$

Se il denominatore del primo membro è diverso da zero possiamo integrare

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \frac{1}{x} dx + C \Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + C \Rightarrow$$

$$e^{\ln|y-1|} e^{-\ln|y|} = e^{\ln|x|} e^C$$

Di qui, ponendo $e^C = C$ ed esplicitando y otteniamo l'integrale generale

$$\frac{y-1}{y} = xC \Rightarrow y = \frac{1}{1-xC}$$

(1.2) ► $\frac{y'}{x} = \frac{2y}{x^2y + 2x^2 - y - 2}$

Il denominatore del secondo membro è facilmente fattorizzabile

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2(y+2) - (y+2)} \Rightarrow \frac{(y+2)y'}{y} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Separate le variabili è possibile integrare

$$\int \frac{y+2}{y} dy = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx \Rightarrow y + \ln y^2 = \ln(x^2 - 1) + C$$

e quindi ottenere l'integrale generale in forma implicita

$$y + \ln \frac{y^2}{C(x^2 - 1)} = 0$$

A proposito di C...

La costante d'integrazione C è arbitraria e pertanto può essere espressa in qualsiasi forma (C^2 , $2C$, $\ln C$, e^C , ecc.) mentre qualsiasi sua forma può essere espressa come C.

A seconda della convenienza.

(1.3) ► $y' \tan x = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx + C \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + C \Rightarrow y = C \sin x$

(1.4) ► $y'x - y = y^3 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + C = \int \frac{1}{y^3 + y} dy \Rightarrow \ln|x| + C = \frac{\ln \left| \frac{y^2}{y^2 + 1} \right|}{2}$

Si intuisce che non sarà possibile esplicitare in y e pertanto esplicheremo in x

$$Cx^2 = \frac{y^2}{y^2 + 1} \Rightarrow x = C \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

(1.5) ► $y\sqrt{1-x^2}y' = x \Rightarrow \int y dy = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\sqrt{1-x^2} + C \Rightarrow y^2 = C - 2\sqrt{1-x^2}$

(1.6) ► $xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

$$yy' = \frac{1}{x} + x + \frac{y^2}{x} + xy^2 = \frac{1}{x}(1 + y^2) + x(1 + y^2) = (1 + y^2) \left(\frac{1}{x} + x \right) \Rightarrow$$

$$\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1+x^2}{x} \Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{1+x^2}{x} dx + C \Rightarrow \frac{\ln(y^2+1)}{2} = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2+1 = Cx^2 e^{x^2}$$

(1.7) ► $xdx + ydy = xy(xdy - ydx)$

$$xdx + ydy = x^2 ydy - xy^2 dx \Rightarrow xdx(1+y^2) = ydy(x^2-1) \Rightarrow \int \frac{x}{x^2-1} dx + C = \int \frac{y}{y^2+1} dy \Rightarrow$$

$$\frac{\ln|x^2-1|}{2} + C = \frac{\ln|y^2+1|}{2} \Rightarrow y^2+1 = C(x^2-1)$$

(1.8) ► $\sin \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \cos \vartheta \sin \varphi d\varphi = 0$

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi \Rightarrow \int \tan \vartheta d\vartheta = \int \tan \varphi d\varphi \Rightarrow -\ln|\cos \vartheta| = -\ln|\cos \varphi| + C$$

da cui è possibile esplicitare

$$\cos \vartheta = C \cos \varphi$$

(1.9) ► $zdt - (t^2 - a^2)dz = 0$

$$\frac{z}{dz} - \frac{(t^2 - a^2)}{dt} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{1}{t^2 - a^2} dt + C \Rightarrow \ln|z| = \frac{\ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right|}{2a} + C \Rightarrow z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}$$

2. Equazioni omogenee risolubili con sostituzione $v = \frac{y}{x}$

Ricordiamo che una funzione $f(x,y)$ è omogenea di grado n se è $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Per risolvere questo genere di equazioni

$$y' = f(tx,ty)$$

il lavoro da fare è quello di ridurle ad equazioni con variabili separabili mediante sostituzione.

Poniamo $t = \frac{1}{x}$ ed otteniamo

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

poniamo ancora $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = D(vx) = v + x \frac{dv}{dx}$

sostituiamo nell'espressione precedente ed otteniamo

$$v + x \frac{dv}{dx} = f(1,v)$$

separiamo ora le variabili e quindi integriamo

$$\frac{dv}{f(1-v)-v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{f(1-v)-v} dv = \int \frac{1}{x} dx + C$$

Dopo l'integrazione sarà sufficiente sostituire di nuovo $v = y/x$ per ottenere l'integrale generale.

Negli esercizi di questo paragrafo, salvo diversa indicazione, le equazioni sono direttamente omogenee di grado zero.

$$(2.1) \quad y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

Si tratta di un'equazione con variabili non separabili nella quale è $\frac{txy}{tx^2 - ty^2} = \frac{t^0}{t^0} \cdot \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ e che quindi è equazione omogenea di grado zero. Operiamo le sostituzioni

$$y' = v + x \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad y = vx$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{vx^2}{x^2 - v^2x^2} = \frac{v}{1 - v^2}$$

da cui

$$\frac{x dv}{dx} = \frac{v^3}{1 - v^2}$$

Ora possiamo separare le variabili ed integrare

$$\int \frac{1}{x} dx + C = \int \frac{1 - v^2}{v^3} dv = \int \frac{1}{v^3} dv - \int \frac{1}{v} dv$$

$$\ln|x| + C = -\frac{1}{2v^2} - \ln|v|$$

ponendo la variabile arbitraria $C = \ln|C|$ avremo

$$\ln|x| + \ln|C| + \ln|v| = -\frac{1}{2v^2} \Rightarrow \ln|vx C| = -\frac{1}{2v^2}$$

Per finire sostituiamo $v = \frac{y}{x}$ ed otteniamo l'integrale generale in forma implicita

$$\ln|yC| = -\frac{x^2}{2y^2}$$

$$(2.2) \quad \blacktriangleright (y + x)dx + xdy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+x}{x} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = -\frac{x(1+v)}{vx} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = -(1+2v) \Rightarrow \frac{x}{dx} = -\frac{1+2v}{dv}$$

$$\int \frac{1}{x} dx + C = -\int \frac{1}{1+2v} dv \Rightarrow \ln|x| + C = -\frac{\ln|1+2v|}{2} \Rightarrow -2\ln|x| + C = \ln|1+2v| \Rightarrow$$

$$\frac{C}{x^2} = 1 + 2v \Rightarrow \frac{C}{x^2} = \frac{2y}{x} + 1 \Rightarrow x^2 + 2xy = C$$

$$(2.3) \quad \blacktriangleright (x + y)dx + (y - x)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{y-x}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = -\frac{1-v}{v-1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{v-1}{1-v^2} dv \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x} dx + C = -\int \frac{v-1}{1-v^2} dv \Rightarrow \ln|x| + C = -\frac{\ln(v^2+1) - 2 \arctan v}{2} = -\ln(v^2+1)^{1/2} + \arctan v \Rightarrow$$

$$\ln|x| + C = -\ln\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)^{1/2} + \arctan\frac{y}{x} = -\ln(y^2 + x^2)^{1/2} + \ln|x| + \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\ln(y^2 + x^2)^{1/2} - \arctan\frac{y}{x} = C$$

(2.4) ► $(t - s)dt + tds = 0$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s-t}{t} \Rightarrow v + t \frac{dv}{dt} = \frac{t(v-1)}{t} \Rightarrow \frac{t}{dt} = -\frac{1}{dv} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{t} dt + C = -\int dv \Rightarrow \ln|t| + C = -v \Rightarrow \ln|t| + \frac{s}{t} = C \Rightarrow te^{s/t} = C$$

(2.5) ► $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^3 + v^3 x^3}{v^2 x^3} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = v^2 dv \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x} dx + C = \int v^2 dv \Rightarrow \ln|x| + C = \frac{v^3}{3} \Rightarrow \ln|x| + \ln|C| = \frac{y^3}{3x^3} \Rightarrow y = x(\sqrt[3]{3 \ln Cx})$$

(2.6) ► $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ con $x' = \frac{dx}{dy}$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{(2\sqrt{xy} - x)}{y} \Rightarrow v + y \frac{dv}{dy} = -\frac{2y\sqrt{v} - vy}{y} \Rightarrow y \frac{dv}{dy} = -2\sqrt{v} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y} dy + C = -\int \frac{1}{2\sqrt{v}} dv \Rightarrow \ln|y| + \sqrt{\frac{x}{y}} = C$$

(2.7) ► $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + \sin v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sin v} dv \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + C = \int \frac{1}{\sin v} dv \Rightarrow$$

$$\ln|x| + C = \ln \frac{\sin v}{\cos v + 1} \Rightarrow xC = \tan \frac{v}{2} = \tan \frac{y}{2x}$$

(2.8) ► $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

L'equazione è omogenea di grado due e viene risolta come quelle di grado zero

$$\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2txty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2 2xy}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2 x^2}{2vx^2} \Rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} dv \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + C = 2 \int \frac{v}{1-v^2} dv \Rightarrow$$

$$\ln|x| + C = -\ln|v^2 - 1| \Rightarrow Cx = \frac{1}{v^2 - 1} \Rightarrow Cx = \frac{x^2}{y^2 - x^2} \Rightarrow C(y^2 - x^2) = x$$

3. Equazioni del tipo $y' = f(ax + by + c)$ risolubili con sostituzione $v = ax + by + c$

(3.1) ► $y' = (x + y)^2$

Poniamo $v = x + y \Rightarrow y = v - x \Rightarrow y' = v' - 1$

sostituendo si ottiene un'equazione a variabili separabili

$$v' - 1 = v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{v^2 + 1} dv$$

da cui integrando si ottiene

$$\int dx + C = \int \frac{1}{v^2 + 1} dv \Rightarrow x + C = \arctan v \Rightarrow v = \tan(x + C)$$

ed infine sostituendo si ha l'integrale generale

$$y = \tan(x + C) - x$$

(3.2) ► $y' = (8x + 2y + 1)^2$

$$v = 8x + 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{v - 8x - 1}{2} \Rightarrow y' = \frac{v'}{2} - 4$$

$$\frac{dv}{dx} = 2v^2 + 8 \Rightarrow \int dx + C = \int \frac{1}{2v^2 + 8} dv \Rightarrow x + C = \frac{\arctan \frac{v}{2}}{4} \Rightarrow C = \arctan\left(\frac{8x + 2y + 1}{2}\right) - 4x$$

(3.3) ► $y' = (x - y)^2 + (x - y) + 1$

$$v = x - y \Rightarrow y = x - v \Rightarrow y' = 1 - v'$$

$$1 - v' = (x - x + v)^2 + (x - x + v) + 1 \Rightarrow -v' = v + v^2$$

$$-\int dx + C = \int \frac{1}{v + v^2} dv \Rightarrow -x + C = \ln \left| \frac{v}{v + 1} \right|$$

$$-x + C = \ln \frac{x - y}{x - y + 1} \Rightarrow Ce^{-x} = \frac{x - y}{x - y + 1}$$

ora, con un po' di pazienza, esplicitiamo in y

$$xCe^{-x} - yCe^{-x} + Ce^{-x} = x - y \Rightarrow$$

$$y(1 - Ce^{-x}) = x(1 - Ce^{-x}) - Ce^{-x} = x - \frac{Ce^{-x}}{1 - Ce^{-x}} \Rightarrow$$

$$y = x - \frac{\frac{C}{e^x}}{\frac{e^x - C}{e^x}} = x - \frac{C}{e^x - C} = x - \frac{1}{\frac{e^x}{C} - 1} = \frac{1}{Ce^x - 1}$$

(3.4) ► $y' = \sec(x + y) - 1$

$$v = x + y \Rightarrow y = v - x \Rightarrow y' = v' - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos v} - 1 \Rightarrow \int dx + C = \int \cos v dv \Rightarrow x + C = \sin(x + y)$$

4. Equazioni lineari del tipo $y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$

Ricordiamo che è detta lineare un'equazione che sia tale nella funzione incognita e nella sua derivata.

Sono lineari le equazioni

$$y' = \frac{x-y}{1-x-y}, \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

mentre non è lineare l'equazione

$$y' + xy = x^3 y^3$$

Un'equazione lineare del tipo

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

è riducibile ad omogenea mediante sostituzione. Come ?

Appare evidente che quando $c = c' = 0$ l'equazione è omogenea e pertanto un buon metodo per procedere è quello di operare una sostituzione che elimini c, c_1 .

Poniamo $x_1 = x + h, y_1 = y + k$

e sostituiamo nell'equazione

$$y' = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}$$

Se noi scegliamo h, k come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

potremo scrivere la nostra equazione in modo che sia omogenea

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

e come tale risolvibile per sostituzione. Naturalmente ciò nell'ipotesi che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{ dei coefficienti sia diverso da zero, altrimenti il sistema non ha soluzioni.}$$

Ma se $\Delta = 0$ allora i coefficienti sono proporzionali e quindi è possibile fattorizzare e poi sostituire.

$$(4.1) \blacktriangleright y' = \frac{x+y-3}{x-y-1} \Rightarrow \Delta \neq 0$$

Prima sostituzione per ridurre l'equazione a omogenea.

Poniamo

$$x = x_1 + h$$

$$y = y_1 + k$$

sostituendo nella (4.1) otteniamo

$$b) y' = \frac{x_1 + h + y_1 + k - 3}{x_1 + h - y_1 - k - 1} \Rightarrow \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

Ora abbiamo bisogno di sapere quanto valgono i due parametri h, k e pertanto risolviamo il sistema

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 2, k = 1$$

sostituendo in b) si eliminano i due parametri h, k e si ottiene l'equazione omogenea

$$y_1' = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

Seconda sostituzione per risolvere l'equazione omogenea.

Separiamo le variabili con la sostituzione già vista e cioè ponendo

$$v = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y_1 = vx_1 \Rightarrow y_1' = v + x_1 \frac{dv}{dx_1}$$

$$v + x_1 \frac{dv}{dx_1} = \frac{x_1 + vx_1}{x_1 - vx_1} = \frac{1+v}{1-v} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1-v}{1+v^2} dv$$

Ora possiamo integrare

$$\int \frac{1}{x_1} dx_1 + C = \int \frac{1-v}{1+v^2} dv \Rightarrow \ln|x_1| + \ln|C| = \arctan v - \frac{\ln(1+v^2)}{2} \Rightarrow$$

Ricorda che... $\frac{\ln x}{2} = \ln \sqrt{x}$

$$\ln \left| Cx_1 \sqrt{\ln(1+v^2)} \right| = \arctan v$$

Infine sostituiamo due volte a ritroso per ottenere l'integrale generale

$$\ln \left| Cx_1 \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2}} \right| = \arctan \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow \ln \left| C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \right| = \arctan \frac{y-1}{x-2}$$

(4.2) ► $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5} \Rightarrow \Delta = 0$

Si vede immediatamente che i coefficienti sono proporzionali e ciò implica una semplificazione dei calcoli in quanto l'equazione può scriversi come

$$y' = \frac{2x + y - 1}{2(2x + y) + 5}$$

Ponendo

$$v = 2x + y \Rightarrow y = v - 2x \Rightarrow y' = v' - 2$$

e quindi sostituendo si ha

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{2v+5} + 2 = \frac{5v+9}{2v+5} \Rightarrow dx = \frac{2v+5}{5v+9} dv$$

Ora integriamo e ricaviamo la soluzione generale esplicitando la costante d'integrazione

$$\int dx + C = \int \frac{2v+5}{5v+9} dv \Rightarrow C + x = \frac{7 \ln|5v+9|}{25} = \frac{2v}{5} \Rightarrow \frac{7 \ln|10x + 5y + 9|}{25} + \frac{4x + 2y}{5} \Rightarrow$$

$$C = 7 \ln|10x + 5y + 9| + 10y - 5x$$

(4.3) ► $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

L'equazione non è omogenea ma esplicitando nella derivata è immediatamente chiaro che $\Delta = 0$

$$y' = -\frac{2x - y}{4x - 2y + 3}$$

Poniamo quindi

$$2x - y = v \Rightarrow y = 2x - v \Rightarrow y' = 2 - v$$

Sostituiamo e separiamo le variabili

$$v' = 2 + \frac{v}{2v+3} = \frac{5v+6}{2v+3} \Rightarrow dx = \frac{2v+3}{5v+6} dv$$

Infine integriamo e troviamo una forma implicita per la soluzione generale

$$\int dx + C = \int \frac{2v+3}{5v+6} dv \Rightarrow$$

$$C + x = \frac{3 \ln|5v+6| + 10v}{25} \Rightarrow 25x + C = 3 \ln|10x - 5y - 6| + 20x - 10y \Rightarrow$$

$$C = 3 \ln|10x - 5y + 6| - 5x - 10y$$

$$(4.4) \blacktriangleright y' = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \Delta \neq 0$$

L'equazione ha il determinante dei coefficienti diverso da zero ma è evidentemente omogenea e pertanto dovremo soltanto separare le variabili mediante sostituzione:

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x - vx}{x + vx} \Rightarrow x dx = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + C = \int \frac{1 + v}{1 - 2v - v^2} dv \Rightarrow \ln|x| + C = -\frac{\ln|v^2 + 2v - 1|}{2} \Rightarrow$$

$$Cx^2 = \frac{1}{v^2 + 2v - 1} = \frac{x^2}{y^2 + 2xy - x^2} \Rightarrow y^2 + 2xy - x^2 = \frac{1}{C} = C$$

$$(4.5) \blacktriangleright y' = \frac{36x + 6y}{6x + y} \Rightarrow \Delta = 0$$

L'equazione è semplicissima perchè è omogenea e di fatto è a variabili già separate potendosi immediatamente scrivere

$$\int dx + C = \frac{1}{12} \int dv \Rightarrow y = 6x + C$$

Fine della prima parte ■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math