

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 2

Equazioni lineari ed equazione di Bernoulli

di Leonardo Calconi

20.12.2007

1. Equazioni lineari

Come già visto nella prima parte di questo lavoro, sono lineari le equazioni tali rispetto alla funzione incognita e alla sua derivata.

Una forma generale per queste equazioni è

$$a) \quad y' + P(x)y = Q(x)$$

dove $P(x), Q(x)$ sono o funzioni note come in a), o costanti come in b)

$$b) \quad y' + ay = b$$

$$(1.1) \quad y' + 12y = 7$$

L'equazione a coefficienti costanti può essere facilmente risolta per separazione delle variabili

$$\frac{dy}{dx} + 12y = 7 \Rightarrow dx = \frac{dy}{7 - 12y} \Rightarrow \int dx + C = \int \frac{1}{7 - 12y} dy \Rightarrow x + C = -\frac{\ln|7 - 12y|}{12} \Rightarrow$$

$$e^{-12x - 12C} = 7 - 12y \Rightarrow y = \frac{-e^{-12x - C} + 7}{12} \Rightarrow y = -\frac{e^{-C}}{12} e^{-12x} + \frac{7}{12} \Rightarrow y = Ce^{-12x} + \frac{7}{12}$$

Quindi se ne deduce che la soluzione generale dell'equazione b) è della forma

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

$$(1.2) \quad y' - \tan(x)y - \cos(x) = 0$$

Un'equazione lineare con $Q(x) = 0$ è generalmente detta *omogenea*, con un discreto grado di ambiguità rispetto alle equazioni omogenee viste nella prima parte di questo lavoro. Poiché alcuni la chiamano equazione lineare *ridotta* anche noi la chiameremo così eliminando l'ambiguità.

La (1.2) non è un'equazione ridotta ma noi consideriamo la sua *equazione ridotta corrispondente*

$$y' - \tan(x)y = 0$$

e mostriamo che la soluzione generale di una tale equazione è

$$a) \quad y = C(x)e^{-A(x)}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $P(x)$ e $C(x)$ è funzione di x .

Nella (1.2) poniamo

$$\cos(x) = 0$$

ottenendo l'equazione ridotta corrispondente

$$\frac{dy}{dx} - \tan(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \tan(x)dx$$

Integriamo direttamente questa equazione ponendo $C = C(x)$ ossia C funzione di x

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \tan(x)dx + C(x) \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos(x)| + \ln|C(x)| \Rightarrow$$

$$b) \quad y = e^{C(x)} e^{-\ln|\cos(x)|} = \frac{C(x)}{\cos(x)}$$

ed otteniamo la soluzione generale a).

Ora dobbiamo arrivare ad una soluzione generale per la (1.2) nella quale C sia una costante arbitraria e per fare ciò dobbiamo sapere cosa vale $C(x)$.

Pertanto facciamo marcia indietro e deriviamo b)

$$y' = \frac{1}{\cos(x)} \frac{dC}{dx} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} C(x)$$

Quindi sostituiamo nella (1.2) i valori trovati per y e y'

$$\frac{1}{\cos(x)} \frac{dC(x)}{dx} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} C(x) = \tan(x) \frac{C(x)}{\cos(x)} + \cos(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \cos^2(x)$$

Integrando otteniamo $C(x)$

$$\int dC(x) = \int \cos^2(x) dx + C_1 \Rightarrow C(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \frac{x}{2} + C_1$$

Ora possiamo sostituire in a) per eliminare $C(x)$ ed introdurre la costante arbitraria C

$$y = \left(\frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \frac{x}{2} + C \right) \frac{1}{\cos(x)}$$

ed ecco l'integrale generale della (1.2).

Ricapitolando, il calcolo dell'integrale generale col metodo dell'*equazione ridotta corrispondente* si articola in tre fasi:

1. Calcolo della soluzione generale dell'equazione ridotta corrispondente
2. Calcolo di $C(x)$
3. Eliminazione di $C(x)$

$$(1.3) \blacktriangleright y' + \frac{2y}{x} = x^3$$

Troviamo la soluzione generale dell'equazione ridotta corrispondente

$$\int \frac{1}{2y} dy = -\int \frac{1}{x} dx + C(x) \Rightarrow \ln|y| = -2 \ln|x| + \ln|C(x)| \Rightarrow y = \frac{C(x)}{x^2}$$

Troviamo cosa vale $C(x)$

$$y' = \frac{dC(x)}{dx} \frac{1}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} \frac{1}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = x^3$$

$$\int dC(x) = \int x^3 dx + C \Rightarrow C(x) = \frac{x^6}{6} + C$$

Eliminiamo $C(x)$ sostituendolo nella soluzione generale dell'equazione ridotta corrispondente e troviamo l'integrale generale della (1.3)

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

$$(1.4) \blacktriangleright y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

Calcoliamo la soluzione generale dell'equazione ridotta corrispondente

$$\int \frac{1}{2y} dy = \int \frac{1}{x+1} dx + C(x) \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + 2 \ln C(x) \Rightarrow$$

$$y = C(x)(x+1)^2$$

Calcoliamo $C(x)$

$$y' = \frac{dC(x)}{dx} (x+1)^2 + 2(x+1)C(x)$$

$$\frac{dC(x)}{dx}(x+1)^2 + 2(x+1)C(x) - \frac{2C(x)(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = (x+1) \Rightarrow \int dC(x) = \int (x+1)dx + C \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Eliminiamo $C(x)$ e calcoliamo l'integrale generale della (1.4)

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right) (x+1)^2$$

O anche, ponendo $C = C + \frac{1}{2}$

$$y = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right] (x+1)^2$$

$$(1.5) \blacktriangleright y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

E' l'equazione dell'esercizio precedente della quale ora calcoleremo l'integrale generale con un metodo diverso, quello del *prodotto di due funzioni*.

Proponiamoci di trovare la soluzione generale come prodotto di due funzioni $u(x), v(x)$ ponendo $y = uv$

Deriviamo

$$y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Sostituiamo nella (1.5)

$$a) u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$$

Ora si tratta di determinare una delle due funzioni $u(x), v(x)$ e poi, sostituendo nell'espressione precedente, determinare anche l'altra. Riscriviamo l'espressione a)

$$b) u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

Poiché le due funzioni $u(x), v(x)$ sono arbitrarie purché diverse da zero, possiamo ad esempio scegliere $v(x)$ in modo che sia

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$$

Separando le variabili si risolve $v(x)$ a meno della costante arbitraria C che introdurremo in seguito

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|v| = 2 \ln|x+1| \Rightarrow v = (x+1)^2$$

Ora sostituiamo in b)

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = (x+1)$$

Separando di nuovo le variabili si risolve $u(x)$ introducendo C

$$\int du = \int (x+1) dx + C \Rightarrow u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Avendo a disposizione le due funzioni $u(x), v(x)$ l'integrale generale della (1.5) sarà

$$y = uv = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right] (x+1)^2$$

(1.6) ► $s' \cos t + s \sin t = 1$

Risolviamo col metodo dell'equazione ridotta corrispondente.

$$s' + s \tan t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{s'}{s} + \tan t = 0$$

$$\int \frac{1}{s} ds = -\int \tan t dt + C(t) \Rightarrow \ln|s| = \ln|\cos t| + \ln|C(t)| \Rightarrow s = C(t) \cos t$$

$$s' = \frac{dC(t)}{dt} \cos t - \sin t C(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} \cos t - \sin t C(t) + C(t) \cos t \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\int dC(t) = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt + C \Rightarrow C(t) = \tan t + C$$

$$s = (\tan t + C) \cos t \Rightarrow \sin t + C \cos t$$

(1.7) ► $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$

Risolviamo col metodo del prodotto di due funzioni.

$$y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} uv = 1$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} v \right) + v \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} v = 0$$

$$\frac{1}{v} dv = -\int \frac{1}{x^2} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x} + 2 \ln|x| \Rightarrow v = e^{\frac{1}{x}} x^2$$

$$e^{\frac{1}{x}} x^2 \frac{du}{dx} = 1$$

$$\int du = \int \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} x^2} dx + C \Rightarrow u = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

$$y = uv = \left(e^{-\frac{1}{x}} + C \right) e^{\frac{1}{x}} x^2 = \left(1 + C e^{\frac{1}{x}} \right) x^2$$

$$(1.8) \blacktriangleright y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$$

Risolviamo col metodo del prodotto di due funzioni

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{nuv}{x} = e^x x^n$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{nv}{x} \right) + v \frac{du}{dx} = e^x x^n$$

$$\int \frac{dv}{v} = n \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|v| = n \ln|x| \Rightarrow v = x^n$$

$$x^n \frac{du}{dx} = e^x x^n$$

$$\int du = \int e^x dx + C \Rightarrow u = e^x + C$$

$$y = uv = (e^x + C)x^n$$

Risolviamo ora col metodo dell'equazione ridotta corrispondente per valutare quale dei due sia il più conveniente.

$$\int \frac{1}{y} dy = n \int \frac{1}{x} dx + C(x)$$

$$\ln|y| = n \ln|x| + \ln|C(x)| \Rightarrow y = x^n C(x)$$

$$y' = nx^{n-1}C(x) + \frac{dC(x)}{dx} x^n$$

$$nx^{n-1}C(x) + \frac{dC(x)}{dx} x^n - \frac{n}{x} x^n C(x) = e^x x^n$$

$$\int dC(x) = \int e^x dx + C \Rightarrow C(x) = e^x + C$$

$$y = x^n (e^x + C)$$

Come si vede per questa equazione non ci sono differenze apprezzabili nella quantità e qualità di calcoli da eseguire.

2. Equazione di Bernoulli

E' un'equazione del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

che, con $n \neq 0, n \neq 1$, è ovviamente non lineare ma facilmente risolvibile con una sostituzione che permetta di ricondurla a lineare togliendo di mezzo y^n .

$$(2.1) \blacktriangleright y' + xy - x^3 y^3 = 0$$

Dividiamo tutti i membri della (2.1) per $y^n = y^3$

$$a) \frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} - x^3 = 0$$

Apparentemente sembra che la situazione si sia complicata, ma non è così perché noi poniamo

$$v = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow v' = -\frac{2}{y^3} y' \Rightarrow \frac{1}{y^3} = -\frac{v'}{2y'}$$

quindi sostituiamo nella a) per ottenere un'equazione lineare nella nuova funzione v

$$-\frac{v'}{2} + vx - x^3 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2vx = -2x^3$$

Risolviamola con il metodo dell'equazione ridotta corrispondente

$$\frac{dv}{v} = 2x dx \Rightarrow \int \frac{1}{v} dv = 2 \int x dx + C(x) \Rightarrow \ln|v| = x^2 + C(x)$$

$$v = C(x)e^{x^2} \Rightarrow v' = \frac{dC(x)}{dx} e^{x^2} + 2xe^{x^2} C(x)$$

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{x^2} + 2xe^{x^2} C(x) - 2xe^{x^2} C(x) = -2x^3$$

$$\int dC(x) = -2 \int \frac{x^3}{e^{x^2}} dx \Rightarrow C(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2} + C$$

$$v = x^2 + 1 + Ce^{x^2} = \frac{1}{y^2}$$

Da cui l'integrale generale della (2.1)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}$$

$$(2.2) \blacktriangleright (1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$$

Dividiamo tutto per y^2

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y(1-x^2)} = \frac{ax}{(1-x^2)}$$

Poniamo

$$v = \frac{1}{y} \Rightarrow v' = -\frac{1}{y^2} y' \Rightarrow \frac{1}{y^2} = -\frac{v'}{y'}$$

Ricaviamo per sostituzione l'equazione lineare

$$v' + \frac{vx}{(1-x^2)} = -\frac{ax}{(1-x^2)}$$

Risolviamola col metodo del prodotto di due funzioni

$$v = uz \Rightarrow v' = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}$$

$$\left(u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} \right) + \frac{uzx}{(1-x^2)} = -\frac{ax}{(1-x^2)} \Rightarrow z \left(\frac{du}{dx} + \frac{ux}{(1-x^2)} \right) + \frac{udz}{dx} = -\frac{ax}{(1-x^2)}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{ux}{(1-x^2)} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{u} du = -\int \frac{x}{(1-x^2)} dx \Rightarrow \ln|u| = \frac{\ln|x^2-1|}{2} \Rightarrow u = \sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{dz}{dx} \sqrt{x^2-1} = -\frac{ax}{(1-x^2)} \Rightarrow \int dz = -a \int \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} dx + C \Rightarrow z = -\frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

$$v = uz = -a + C\sqrt{x^2-1}$$

Da cui l'integrale generale della (2.2)

$$\frac{1}{y} = v \Rightarrow y = \frac{1}{C\sqrt{x^2 - 1} - a}$$

$$(2.3) \blacktriangleright y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{y}}{x} = x$$

$$v = \sqrt{y}, v' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

Ricorda che...poniamo $v = \frac{1}{y^{n-1}}$ ovvero $v = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{y}$

$$2v' - \frac{4v}{x} = x$$

$$v = zu \Rightarrow v' = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

$$2\left(z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}\right) - \frac{4zu}{x} = x \Rightarrow z\left(\frac{2du}{dx} - \frac{4u}{x}\right) + 2u \frac{dz}{dx} = x$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x} = 0$$

$$\int \frac{1}{u} du = 2 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|u| = 2 \ln|x| \Rightarrow u = x^2$$

$$\int dz = \int \frac{1}{2x} dx + C \Rightarrow z = \frac{\ln|x|}{2} + C$$

$$v = \left(\frac{\ln|x|}{2} + C\right)x^2 \Rightarrow y = \left(\frac{\ln|x|}{2} + C\right)^2 x^4$$

La (2.3) è un'equazione molto semplice che si può risolvere anche per sostituzione diretta ponendo

$$y = zu \Rightarrow y' = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

$$z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx} = \frac{4zu}{x} + x\sqrt{zu}$$

per poi procedere nello stesso modo.

$$(2.4) \blacktriangleright (1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy) dy$$

Prima di metterci le mani nei capelli per la disperazione riflettiamo sul fatto che questa equazione non lineare in y di Bernoulli può essere letta come semplice equazione lineare in x !

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1 + y^2} \sin y}{1 + y^2} - \frac{xy}{1 + y^2}$$

Magnifico ! Risolviamola col metodo del prodotto di due funzioni

$$x = uv \Rightarrow x' = u \frac{dv}{dy} + v \frac{du}{dy}$$

$$u \frac{dv}{dy} + v \frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{1 + y^2} \sin y}{1 + y^2} - \frac{uvy}{1 + y^2}$$

$$u \left(\frac{dv}{dy} + \frac{vy}{1 + y^2} \right) + \frac{vdu}{dy} = \frac{\sqrt{1 + y^2} \sin y}{1 + y^2}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = - \int \frac{y}{1 + y^2} dy \Rightarrow \ln|v| = - \frac{\ln(1 + y^2)}{2} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{1+y^2} \sin y}{1+y^2} \Rightarrow \int du = \int \sin y dy + C \Rightarrow u = -\cos y + C$$

$$x = \frac{-\cos y + C}{\sqrt{1+y^2}}$$

Quindi una forma dell'integrale generale della (2.4) nell'incognita y è esclusivamente implicita e può essere del tipo

$$C = x\sqrt{1+y^2} + \cos y$$

(2.5) ► $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x$$

$$v = \frac{1}{y} \Rightarrow v' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$v' - \frac{v}{x} = x$$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{1}{x} dx + C(x)$$

$$\ln|v| = \ln|x| + \ln|C(x)|$$

$$v = xC(x) \Rightarrow v' = C(x) + x \frac{dC(x)}{dx}$$

$$C(x) + x \frac{dC(x)}{dx} - C(x) = x$$

$$\int dC(x) = \int dx + C \Rightarrow C(x) = x + C$$

$$v = x^2 + xC$$

$$y = \frac{1}{x^2 + xC}$$

(2.6) ► $(y-1)y' - x - 1 = -\frac{1}{2x}(y-1)^2$

L'equazione proposta non è un'equazione di Bernoulli anche se può sembrarlo.

Infatti, poiché $D\left(\frac{(y-1)^2}{2}\right) = y-1$ siamo in presenza di un'equazione del tipo

$$f'(y)y' + f(y)A(x) = B(x)[f(y)]^n$$

equazione che, ponendo

$$z = f(y)$$

e prestando attenzione al fatto che

$$f'(y)y' = \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dx}$$

può essere ridotta ad equazione di Bernoulli

$$z' + zA(x) = B(x)z^n$$

Ma con la sostituzione proposta

$$a) z = \frac{(y-1)^2}{2}$$

la (2.6) diviene un'equazione di Bernoulli con $n = 0$ e quindi un'equazione lineare

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = x + 1$$

che risolviamo col metodo del prodotto di due funzioni

$$z = uv \Rightarrow z' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{uv}{x} = x + 1$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} \right) + v \frac{du}{dx} = x + 1$$

$$v = \frac{1}{x}, u = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Da cui sostituendo in a) si ha l'integrale generale della (2.6) in forma implicita

$$(y-1)^2 = \frac{2x^2}{3} + x + \frac{2C}{x}$$

$$(2.7) \blacktriangleright (y \ln x - 2) y dx = x dy$$

$$y^2 \ln x - 2y = xy'$$

$$\ln x - \frac{2}{y} = \frac{xy'}{y^2}$$

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = -\frac{z'}{y'}$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{\ln x}{x}$$

$$z' - \frac{2}{x} z = 0 \Rightarrow z = C(x) e^{2 \ln x} = C(x) x^2$$

$$z' = 2xC(x) + \frac{dC(x)}{dx} x^2$$

$$2xC(x) + \frac{dC(x)}{dx} x^2 - 2xC(x) = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow C(x) = \frac{2 \ln x + 1 + Cx^2}{4x^2}$$

$$y = \frac{4}{2 \ln x + 1 + Cx^2}$$

Fine della seconda parte ■

Leonardo Calconi

leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math