

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 3

Equazioni a differenziali totali o riconducibili a tali

di Leonardo Calconi

31.12.2007

1. Premesse

In questa terza parte ci occupiamo di equazioni differenziali del primo ordine che sono risolvibili a determinate condizioni.

Esaminiamo una forma molto generale come la seguente

$$(1.1) f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

A seconda della forma delle due funzioni f, g essa può rappresentare una qualsiasi delle equazioni viste nelle prime due parti di questo lavoro per le quali sono stati indicati dei metodi di soluzione basati su sostituzioni, ma in linea generale la (1.1) non è risolvibile con tali metodi.

Nel paragrafo 4 mostreremo che, se sono verificate determinate condizioni, l'integrale generale della (1.1) è del tipo

$$(1.2) \int_a^x f(x, y)dx + \int_b^y g(a, y)dy = C$$

Le coordinate x, y sono quelle di un punto incluso nel campo di esistenza dell'integrale generale, ovvero nell'intorno del punto $P(a, b)$

Tali condizioni sono:

1. Le due funzioni f, g e le loro derivate parziali devono essere continue nel campo di esistenza dell'integrale generale.
2. Le derivate parziali delle due funzioni devono soddisfare l'uguaglianza: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$

Ora definiamo il problema.

Noi vogliamo sapere se, data un'equazione della forma (1.1), possiamo risolverla con un metodo che vedremo e che porti ad un integrale generale della forma (1.2). Quindi non ci interessa sapere se esiste una soluzione generale perché ciò lo diamo per scontato, ma quale essa è.

E poiché non avrebbe senso cercare qualcosa che non esiste, nel calcolo dell'integrale generale supporremo sempre verificata la condizione 1 limitandoci a considerare la sola condizione 2 e, nel caso essa sia verificata

- il primo membro della (1.1) sarà un **differenziale totale**,
- l'equazione sarà detta **equazione a differenziali totali**
- il suo integrale generale sarà dato dalla (1.2).

Il differenziale totale primo di una funzione è

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Ciò significa esattamente che esiste una funzione $w(x, y)$ che è l'integrale generale della (1.1) e che il primo membro della (1.1) è il differenziale totale della funzione $w(x, y)$, ovvero

$$dw(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

da cui integrando i tre membri

$$w(x, y) = \int f(x, y)dx + \int g(x, y)dy = C$$

Ma se l'equazione non è a differenziali totali ?

Allora può darsi che si riesca a trovare una funzione $\psi(x, y)$ tale che, moltiplicata per tutti i membri dell'equazione data, la trasformi in una equazione a differenziali totali la cui soluzione generale coincide con la soluzione generale dell'equazione originaria.

Se tale funzione $\psi(x, y)$ esiste essa è detta **fattore integrante** in quanto rende integrabile un'equazione che altrimenti non lo è.

Ma come vedremo non esistono metodi generali per ricavare un fattore integrante del tipo $\psi(x, y)$, mentre potremo trovare delle soluzioni per fattori integranti del tipo $\psi(x)$ o $\psi(y)$.

2. Equazioni a differenziali totali

Gli integrali della (1.2) possono essere risolti ciascuno in una delle due incognite x o y tenendo l'altra come parametro e quindi la costante d'integrazione C dipende da tale parametro.

Se riflettiamo sul fatto che l'integrale generale della (1.1) è una funzione incognita w della quale il primo membro della (1.1) è il differenziale totale, ovvero che è

$$\text{I) } \frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y)$$

$$\text{II) } \frac{\partial w}{\partial y} = g(x, y)$$

ci rendiamo conto che per ricavare la (1.2) sarà sufficiente integrare I) o II) nella rispettiva incognita a meno di una funzione nell'altra incognita che soddisfi rispettivamente II) o I).

Ecco nel concreto il lavoro da svolgere:

1. verificare se l'equazione è a differenziali totali calcolando le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$;
2. integrare una delle due funzioni $f(x, y)$ in dx o $g(x, y)$ in dy , tenendo rispettivamente y o x come parametro e introducendo come costante d'integrazione una nuova funzione ϕ nell'incognita tenuta come parametro;
3. derivare il risultato, eguagliarlo a quella delle due funzioni f, g tenuta fuori dall'integrazione ed esplicitare ϕ' ;
4. Integrare e ricavare ϕ ;
5. Sostituire in 3. ed ottenere l'integrale generale.

Ma come vedremo nel paragrafo 4 in molti casi è possibile procedere assai più speditamente risolvendo direttamente la (1.2) nei suoi integrali.

$$(2.1) \blacktriangleright \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

La forma è quella dell'equazione (1.1).

Verifichiamo se il primo membro è un differenziale totale calcolando le due derivate parziali

$$\frac{\partial \left(\frac{2x}{y^3} \right)}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial \left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \right)}{\partial x}$$

L'equazione data è a differenziali totali e pertanto il suo primo membro è il differenziale totale di una funzione incognita $w(x, y)$ che è l'integrale generale della (2.1), ovvero è

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

Troviamo ora la funzione incognita w tenendo presente che possiamo calcolare tale funzione a meno di una seconda funzione incognita, in x o in y , a seconda che si voglia calcolare l'integrale in dy o in dx .

Se assumiamo che tale seconda funzione ϕ sia incognita in y avremo

$$\text{a) } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow w = \int \frac{2x}{y^3} dx + \phi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \phi(y)$$

mentre se stabiliamo che sia $\phi(x)$ avremo

$$b) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Rightarrow w = \int \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy + \phi(x) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + \phi(x)$$

Nel caso a) per definire $\phi(y)$ deriviamo w rispetto ad y ed integriamo per ricavare ϕ

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \phi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Rightarrow \phi'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \phi(y) = -\frac{1}{y} + C$$

da cui sostituendo ϕ in a) si ha l'integrale generale dell'equazione data

$$w = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

Ma possiamo ottenere lo stesso risultato nel caso b) derivando w rispetto ad x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} + \phi'(x) = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow \phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = C$$

La scelta dipenderà da quale tra i due integrali a) o b) conviene calcolare.

$$(2.2) \blacktriangleright (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$

L'equazione è a differenziali totali perché

$$\frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x - 2y)}{\partial x}$$

Calcoliamo la funzione w

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (x^2 + y) \Rightarrow w = \int (x^2 + y) dx + \phi(y) = \frac{x^3}{3} + xy + \phi(y)$$

Deriviamola rispetto ad y e troviamo $\phi(y)$

$$\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3} + xy + \phi(y)\right)}{\partial y} = x + \phi'(y) = x - 2y \Rightarrow \phi(y) = -y^2 + C$$

Ed ecco l'integrale generale

$$C = \frac{x^3}{3} + xy - y^2$$

$$(2.3) \blacktriangleright 2(xy - 1)dx + x^2 dy = 0$$

Dopo aver verificato che l'equazione è a differenziali totali (la verifica è immediata ad occhio...)

$$\frac{\partial(2xy - 2)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial x^2}{\partial x}$$

$$\int (2xy - 2)dx + \phi(y) = x^2 y - 2x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial(x^2 y - 2x + \phi(y))}{\partial y} = x^2 + \phi'(y) = x^2 \Rightarrow \phi(y) = C$$

$$C = x^2 y - 2x$$

$$(2.4) \blacktriangleright 2(xy - 1)dx + x^2 dy - 2dx = 0$$

L'equazione va riscritta nel modo seguente

$$(2xy - 4)dx + x^2 dy = 0$$

ed allora si vede chiaramente che è a differenziali totali.

Questa volta risolviamola tenendo x come costante

$$\int x^2 dy + \phi(x) = x^2 y + \phi(x)$$

$$\frac{\partial(x^2 y + \phi(x))}{\partial x} = 2xy + \phi'(x) = 2xy - 4 \Rightarrow \phi(x) = -4x + C$$

$$x^2 y - 4x = C$$

$$(2.5) \blacktriangleright (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$$

Ancora una volta la verifica che l'equazione è a differenziali totali è "a occhio".

Integriamo a dy tenendo x come parametro

$$2x \int y dy + \phi(x) = xy^2 + \phi(x)$$

Ora, rispetto a dx deriviamo, uguagliamo ed integriamo

$$y^2 + \phi'(x) = x^2 + y^2 + 2x \Rightarrow \phi(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Sostituiamo ed otteniamo l'integrale generale

$$xy^2 + \frac{x^3}{3} + x^2 = C$$

$$(2.6) \blacktriangleright xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2}$$

L'equazione va riscritta in forma canonica

$$dx \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2} \right) + dy \left(y - \frac{x}{x^2 - y^2} \right) = 0$$

Ora è più facile verificare che essa è a differenziali totali e, con un po' di occhio, non dovrebbe neanche esserci bisogno di calcolare le derivate parziali; comunque eccole...

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 - y^2}$$

Non c'è alcuna convenienza a scegliere un parametro d'integrazione piuttosto che un altro, per cui scegliamo y

$$\int \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2} \right) dx + \phi(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|x-y|}{|x+y|} \right) + \phi(y)$$

Determiniamo $\phi(y)$

$$\frac{x}{(x+y)(y-x)} + \phi'(y) \Rightarrow -\frac{x}{x^2 - y^2} + \phi'(y) = y - \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$\phi'(y) = \frac{x}{x^2 - y^2} + y - \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$\phi(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

da cui, sostituendo, l'integrale generale

$$x^2 + y^2 + \ln \left(\frac{|x-y|}{|x+y|} \right) = C$$

3. Fattore integrante

Se il primo membro dell'equazione non è un differenziale totale può darsi che moltiplicandolo per una funzione opportuna da determinare esso divenga tale.

Ad esempio l'equazione

$$(3.1) \blacktriangleright (y + xy^2)dx - xdy = 0$$

non è evidentemente a differenziali totali, ma se ne moltiplichiamo il primo membro per la funzione $\frac{1}{y^2}$ esso diviene un differenziale totale.

$$\left[(y + xy^2)dx - xdy \right] \frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Come abbiamo trovato la funzione $\psi = \frac{1}{y^2}$ detta *fattore integrante* ?

Per la verità l'equazione data è talmente semplice che il fattore integrante, che in questo caso particolare dipende solamente da y mentre in generale dipende da x e da y , si può identificare "a occhio".

3.1 Fattore integrante dipendente da x e da y

Se tale fattore esiste l'equazione data verrà scritta nel modo seguente

$$\psi f dx + \psi g dy = 0$$

e pertanto essa diviene a differenziali totali

$$\frac{\partial \psi f}{\partial y} = \frac{\partial \psi g}{\partial x}$$

da cui, per la regola di derivazione del prodotto,

$$\psi \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ora raccogliamo ψ

$$\psi \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f \frac{\partial \psi}{\partial y} - g \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

quindi moltiplicando per $\frac{1}{\psi}$ e ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = f \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{1}{\psi} - g \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{1}{\psi}$$

$$a) \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = f \frac{\partial \ln \psi}{\partial y} - g \frac{\partial \ln \psi}{\partial x}$$

Se la funzione ψ soddisfa l'equazione a) essa è fattore integrante dell'equazione

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

e dipende chiaramente da x e da y .

La determinazione di un fattore integrante in due incognite è operazione molto complessa che mette in serio dubbio l'utilità di ricorrere a questo metodo di risoluzione anziché ad un altro ed in ogni caso esula dai modesti limiti di questo lavoro. Pertanto ci limiteremo a prendere in considerazione la determinazione di alcuni fattori integranti in una sola incognita.

3.2 Fattore integrante dipendente solo da x o solo da y

Se il fattore integrante dipende, ad esempio, solo da y si ha

$$\frac{\partial \ln \psi}{\partial x} = 0$$

e pertanto

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = f \frac{\partial \ln \psi}{\partial y}$$

$$b) \frac{\partial \ln \psi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f}$$

Se il fattore integrante dipende solo da x si ha ovviamente

$$\frac{\partial \ln \psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -g \frac{\partial \ln \psi}{\partial x}$$

$$b_1) \frac{\partial \ln \psi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}$$

Il rapporto a secondo membro della b) è quello che ci dice se il fattore integrante dipende solo da y e se quindi possiamo determinare ψ risolvendo la b) stessa.

$$\ln \psi = \int \frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} dy \Rightarrow \psi = e^{\int \frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} dy}$$

Perché non compare alcuna costante d'integrazione? La risposta è banale.

Infatti ψ rappresenta una *famiglia di fattori integranti* uno qualsiasi dei quali è adatto a ricondurre l'equazione data a equazione a differenziali totali e quindi possiamo benissimo considerare quello con $C = 0$

Giustificiamo ora il fattore integrante trovato "ad occhio" per la (3.1)

$$\frac{\partial \ln \psi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}$$

Quindi ψ dipende solo da y e vale $\ln \psi = -2 \ln y \Rightarrow \psi = \frac{1}{y^2}$ *cvd.*

Questo risultato può essere generalizzato con le seguenti scritte:

se è $\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{k}{y}$ allora $\psi = y^k$ per un fattore integrante dipendente da y

se è $\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \frac{k}{x}$ allora $\psi = x^k$ per un fattore integrante dipendente da x

se è $\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} = y$ allora $\psi = e^{\frac{y^2}{2}}$ per un fattore integrante dipendente da y

se è $\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = x$ allora $\psi = e^{\frac{x^2}{2}}$ per un fattore integrante dipendente da x

Se infine il rapporto in b), b₁) è una costante allora si ha

$\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \pm k \Rightarrow \psi = e^{\pm ky}$ per un fattore integrante dipendente da y

$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \pm k \Rightarrow \psi = e^{\pm kx}$ per un fattore integrante dipendente da x

Ricorda che...
Un fattore integrante non può essere una costante e pertanto i rapporti b), b₁) non possono mai essere nulli:

$$e^{0x} = 1$$

$$(3.2) \blacktriangleright \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

Non c'è bisogno di calcolare le derivate parziali per stabilire che l'equazione data non è a differenziali totali. Ora dobbiamo vedere se per essa possiamo trovare un fattore integrante in una sola incognita. Proviamo con y

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{2x - 2x - x^2 - y^2}{2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}}$$

Evidentemente la faccenda non va, pertanto proviamo con x

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}}{g} = \frac{2x - 2x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

Ci siamo; il fattore integrante è allora

$$\psi = e^x.$$

Riconduciamo quindi l'equazione data a equazione a differenziali totali

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

Controlliamo se è vero...

$$0 \cdot \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) + (2x + x^2 + y^2) e^x = e^x (x^2 + y^2) + 2xe^x$$

La nuova equazione avrà un integrale generale coincidente con quello della (3.2).

Per risolvere tale equazione decidiamo di tenere x come costante per avere un integrale iniziale più semplice

$$\int e^x x^2 dy + \int e^x y^2 dy + \phi(x) = e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) + \phi(x)$$

$$e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + 2xy \right) + \phi'(x) = e^x \left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)$$

$$\phi(x) = C$$

$$e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) = C$$

$$(3.3) \blacktriangleright (x + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

L'equazione non è a differenziali totali.

Vediamo se esiste un fattore integrante dipendente solo da y o solo da x

Si capisce che non riusciremmo ad ottenere un fattore integrante dipendente da y dal fatto che al denominatore del rapporto b) finirebbe $x - y^2$ non riducibile, pertanto vediamo se esiste ψ dipendente da x

$$\frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

Si, esiste, per cui il fattore integrante è

$$\psi = \frac{1}{x^2}$$

Ricorda che...

Il fatto che ψ dipenda da x non comporta affatto che l'equazione a differenziali totali corrispondente debba essere risolta tenendo x come costante. Stessa osservazione, ovviamente, se ψ dipendesse da y .

L'equazione a differenziali totali corrispondente pertanto è

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0$$

Risolviamola con x come costante

$$-\frac{2}{x} \int y dy + \phi(x) = -\frac{y^2}{x} + \phi(x)$$

$$-y^2 \ln x + \phi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\phi(x) = \ln x - \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{x} + C$$

$$\ln x - \frac{y^2}{x} = C$$

$$(3.4) \blacktriangleright (x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0$$

Ancora una volta la verifica che l'equazione data non è a differenziali totali è immediata.

Troviamo un fattore integrante dipendente solo da y

$$\frac{\cos y - x \cos y - \cos y + y \sin y}{x \sin y + y \cos y}$$

ma tale fattore non esiste, quindi cerchiamolo dipendente solo da x

$$\frac{x \cos y + \cos y - y \sin y - \cos y}{x \cos y - y \sin y} = 1$$

$$\psi(x) = e^x$$

L'equazione corrispondente a differenziali totali è pertanto

$$e^x (x \sin y + y \cos y)dx + e^x (x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

Verifichiamo che sia vero

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = e^x (x \cos y + \cos y - y \sin y)$$

Tenendo y come parametro risolviamo l'equazione corrispondente

$$\sin y \int e^x x dx + y \cos y \int e^x dx + \phi(y) = e^x x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y + \phi(y)$$

$$e^x x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y + \phi'(y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$$

$$\phi(x) = C$$

$$e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) = C$$

$$(3.5) \blacktriangleright \frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$$

L'equazione non è evidentemente a differenziali totali.

Un fattore integrante dipendente solo da x non esiste e pertanto calcoliamo quello dipendente solo da y

$$\frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \psi = \frac{1}{y^2}$$

da cui l'equazione corrispondente a differenziali totali

$$\frac{dx}{xy} + \left(y - \frac{\ln x}{y^2} \right) = 0$$

Troviamo l'integrale generale dell'equazione corrispondente tenendo y come parametro

$$\frac{1}{y} \int \frac{1}{x} dx + \phi(y) = \frac{\ln x}{y} + \phi(y)$$

$$-\frac{\ln x}{y^2} + \phi'(y) = y - \frac{\ln x}{y^2} \Rightarrow \phi(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$$

(3.6) ► $(x + y - 1)y' + (x + y + 1) = 0$

Anche se sembra superfluo dirlo, possiamo risolvere col metodo dei differenziali totali qualunque tipo di equazione sia tale, anche quelle risolvibili con altri metodi.

L'equazione data è lineare e a differenziali totali

$$(x + y - 1)dy + (x + y + 1)dx = 0$$

e pertanto la risolveremo sia con questo metodo che per sostituzione.

Ponendo e sostituendo possiamo separare le variabili

$$v = x + y \Rightarrow dy = dv - dx$$

$$(v - 1)(dv - dx) + (v + 1)dx = 0 \Rightarrow (v - 1)dv + 2dx = 0$$

Ora siamo in grado di integrare

$$\int (v - 1)dv = -2 \int dx + C \Rightarrow \frac{v^2}{2} - v = -2x + C$$

Sostituiamo per ottenere l'integrale generale

$$(x + y)^2 - 2(x + y) = -4x + C$$

$$(x + y)^2 - 2(y - x) = C$$

Ora risolviamo coi differenziali totali

$$\int (x + y + 1)dx + \phi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + \phi(y)$$

$$x + \phi'(y) = x + y - 1$$

$$\phi(y) = \frac{y^2}{2} - y + C$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + x + \frac{y^2}{2} - y + C$$

$$(x + y)^2 - 2(y - x) = C$$

Come si vede c'è una leggera convenienza a risolvere l'equazione coi differenziali totali data l'estrema semplicità degli integrali.

4. Dimostrazioni

4.1 ► Se il primo membro di un'equazione del tipo $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ è un differenziale totale allora è $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (condizione necessaria).

L'ipotesi è che il primo membro dell'equazione sia il differenziale totale di una funzione $w(x, y)$, ovvero

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = dw(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

$$f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad g(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}$$

se ora deriviamo rispetto alle incognite opposte otteniamo

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y \partial x}$$

e nell'ipotesi che le derivate seconde siano continue dimostriamo la tesi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

4.2 ► Se è vera l'uguaglianza $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ allora il primo membro dell'equazione

$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ è il differenziale totale di una funzione $w(x, y)$ (condizione sufficiente).

Ricordiamo che secondo il Teorema di Leibniz la derivata dell'integrale definito di una funzione $f(x, y)$ rispetto ad un parametro α è data dalla formula

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

Ora, considerando y come parametro ed applicando la formula di Leibniz alla relazione

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y)$$

e tenendo presente che l'integrale deve estendersi nel campo di esistenza dell'integrale generale (intorno del punto $P(a, b)$), ricaviamo w per integrazione rispetto ad y

$$w = \int_a^x f(x, y) dx + C_y$$

La costante d'integrazione C_y dipende da y che si tiene come costante e pertanto dobbiamo

introdurre una nuova funzione $\phi(y)$ tale che sia soddisfatta uguaglianza $\frac{\partial w}{\partial y} = g(x, y)$

$$a) \quad w = \int_a^x f(x, y) dx + \phi(y)$$

Applichiamo la formula di Leibniz derivando rispetto ad y

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx + \phi'(y) = g(x, y)$$

e poiché per ipotesi abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

sarà

$$\int_a^x g(x, y) dx + \phi'(y) = g(x, y)$$

ovvero

$$g(x, y) \Big|_a^x + \phi'(y) = g(x, y)$$

$$g(x, y) - g(a, y) + \phi'(y) = g(x, y)$$

$$\phi'(y) = g(a, y)$$

$$\phi(y) = \int_b^y g(a, y) dy + C$$

Ora, avendo espresso $\phi(y)$ in funzione di una costante arbitraria C , possiamo sostituire in a)

$$w = \int_a^x f(x, y) dx + \int_b^y g(a, y) dy + C$$

ovvero, per l'assoluta arbitrarietà di C , porre

$$w = C = \int_a^x f(x, y) dx + \int_b^y g(a, y) dy$$

ed ottenere la forma definitiva dell'integrale generale

$$\int_a^x f(x, y) dx + \int_b^y g(a, y) dy = C$$

Per un valore opportuno di a possiamo calcolare l'integrale generale direttamente con questa formula risolvendone i due integrali.

Ecco alcuni esempi su equazioni viste nel paragrafo 2 ponendo $a = 0$

$$(2.1) \blacktriangleright \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0 \Rightarrow \int \frac{2x}{y^3} dx + \int \frac{1}{y^2} dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

$$(2.2) \blacktriangleright (x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = 0 \Rightarrow \int (x^2 + y) dx - 2 \int y dy = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$$

$$(2.3) \blacktriangleright 2(xy - 1) dx + x^2 dy = 0 \Rightarrow 2 \int (xy - 1) dx = C \Rightarrow x^2 y - 2x = C$$

$$(2.4) \blacktriangleright 2(xy - 1) dx + x^2 dy - 2dx = 0 \Rightarrow \int (xy - 4) dx = C \Rightarrow x^2 y - 4x = C$$

$$(2.5) \blacktriangleright (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0 \Rightarrow \int (x^2 + y^2 + 2x) dx = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$$

$$(2.6) \blacktriangleright x dx + y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 - y^2} \Rightarrow \int \left(x + \frac{y}{x^2 - y^2} \right) dx + \int y dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|x - y|}{|x + y|} \right) + \frac{y^2}{2} = C$$

Fine della terza parte ■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math