EQUAZIONI DIFFERENZIALI 4

Equazioni non lineari, di Clairaut, di Lagrange

di Leonardo Calconi

18.01.2008

1. Equazioni non lineari

1.1 Impostazione del problema.

Grazie al *teorema di esistenza ed unicità* noi sappiamo che un'equazione lineare possiede sempre una sola soluzione generale. Ma se l'equazione è non lineare non abbiamo a disposizione un qualcosa che sia simile al teorema fondamentale dell'algebra per determinare quante e quali siano le soluzioni di tale equazione di grado n, equazione che può avere una soluzione, più soluzioni e non necessariamente n soluzioni, non avere soluzioni particolari per determinati valori di C.
Inoltre, poiché le diverse soluzioni di un'equazione lineare non possono essere tutte soluzioni generali, ovvero rappresentare famiglie diverse di curve, solo una di esse sarà la soluzione generale mentre le altre, se esistono, dovranno essere definite con uno studio che proceda oltre il calcolo dell'integrale generale.
Tutti i grafici, di grande formato, sono raccolti in un file compresso disponibile all'indirizzo
http://www.4dmatrix.it/math/equdif.zip
e ognuno può scaricarli e utilizzarli come crede. Una referenza del tipo "→ img01" fa riferimento al file "equdif_img01.bmp".

1.2 Soluzioni singolari ed inviluppi rettilinei

Sia data l'equazione

(1.1)► $y^2\left(1+y'^2\right)=R^2$ → img01

Troviamone la soluzione generale e poi, se esistono, altre soluzioni delle quali per il momento non diamo alcuna definizione.
Calcoliamo l'integrale generale della (1.1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{R^2-y^2}}{y}\Rightarrow\int dx=\int\frac{y}{\pm\sqrt{R^2-y^2}}dy\Rightarrow x-C=\mp\sqrt{R^2-y^2}$$

$$(x-C)^2+y^2=R^2$$

che teniamo in forma implicita e che rappresenta tutte le circonferenze di raggio R con centro sull'asse delle x distante C dall'origine.
Sostituendolo nella (1.1) si ha la prova che esso è sua soluzione.
Ora deriviamolo rispetto a C

$$2x-2C=0\Rightarrow C=x$$

Formiamo il sistema

$$\begin{cases}(x-C)^2+y^2=R^2\\ x=C\end{cases}$$

Affermiamo che esso rappresenta, in forma parametrica con parametro C, le soluzioni singolari.
Dimostriamolo.
Se effettuiamo una sostituzione per eliminare il parametro C otteniamo le due soluzioni

$$y=\pm R$$

che evidentemente soddisfano la (1.1) e che sono pertanto soluzioni della stessa pur non rappresentando famiglie di curve; sono infatti costanti che rappresentano rette parallele all'asse delle x distanti R da essa.
Sono forse soluzioni particolari ?

Niente affatto perché esse non sono deducibili dall'integrale generale per nessun valore di C e pertanto le definiremo *soluzioni singolari* o *integrali singolari*, tenendo bene a mente che esse sono cosa diversa dalle soluzioni particolari o integrali particolari che sono definiti per determinate condizioni iniziali (x_0, y_0, C_0).
Con questa definizione in tasca ne produciamo un'altra: se un integrale singolare è tangente in ogni suo punto ad una delle curve della famiglia definita dall'integrale generale esso viene detto *inviluppo* e pertanto le due soluzioni singolari della (1.1) sono inviluppi della famiglia di circonferenze.
Affermiamo, proponendoci di mostrarlo in un paragrafo successivo, che se un inviluppo è sempre una soluzione singolare non è necessariamente vero che una soluzione singolare sia sempre un inviluppo.
Le soluzioni singolari delimitano le/la *linea di frontiera* della soluzione generale e pertanto, gli integrali singolari sono anche detti *integrali di frontiera* ed i punti su di essi *punti di frontiera*.
Riassumendo, il lavoro da svolgere per determinare le soluzioni singolari di un'equazione differenziale è:

- trovare l'integrale generale
- derivarlo rispetto a C trovando la rappresentazione parametrica dell'inviluppo
- eliminare il parametro C trovando l'equazione esplicita dell'inviluppo

(1.2)► $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ → img02
Ci proponiamo di trovare tutte le soluzioni, ovvero l'integrale generale, gli integrali singolari se esistono e stabilire se sono inviluppi.
Sostituiamo $y' = p$ ed esplicitiamo y:

a) $y = \dfrac{xp^2 + 4x}{2p}$

deriviamo rispetto ad x considerando p una funzione di x:

$$y' = p = \frac{D\left(xp^2 + 4x\right)p - p'\left(xp^2 + 4x\right)}{2p^2} \Rightarrow 2p^3 = p^3 + 2xp^2p' + 4p - xp^2p' - 4xp'$$

a) $\left(p^2 - 4\right)p - \left(p^2 - 4\right)xp' = 0$

separiamo le variabili, integriamo ed esplicitiamo il parametro p

$$xp' = p \Rightarrow \int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{x}dx + C \Rightarrow \ln p = \ln x + \ln C \Rightarrow p = Cx$$

adesso dobbiamo disfarci del parametro p sostituendo in a) per ottenere l'integrale generale della (1.2):

c) $y = \dfrac{C^2x^3 + 4x}{2Cx} = \dfrac{C^2x^2 + 4}{2C}$

che rappresenta una famiglia di parabole con asse l'asse delle y.
Non esiste alcuna soluzione particolare per $C = 0$
Per cercare gli integrali singolari, se esistono, deriviamo c) rispetto a C:

d) $\dfrac{4C^2x^2 - 2C^2x^2 - 8}{4C^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{C^2} = 0 \Rightarrow C^2x^2 = 4$

ora esplicitiamo C sostituendo in c):

$$y = \frac{4+4}{2C} \Rightarrow C = \frac{4}{y}$$

ed infine togliamocelo dai piedi sostituendo in d):

$$\frac{16x^2}{y^2} = 4 \Rightarrow y = \pm 2x$$

In questo esercizio avremmo potuto procedere più brevemente annullando la b) con

$$p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p = \pm 2$$

per poi sostituire in a) e trovare subito $y = \pm 2x$.

Abbiamo trovato due integrali che sono singolari perché non deducibili dall'integrale generale per nessun valore di C.

Essi rappresentano una coppia di rette passanti per l'origine con coefficiente angolare ± 2 e tangenti in ogni loro punto ad una curva della famiglia b) tranne che nell'origine, dove non passa alcuna curva e dove le due rette non sono tangenti ad alcunché.

1.3 Luoghi geometrici di punti singolari

Se $\Omega(y,x,C)$ è una soluzione generale, può darsi che esista una funzione $\omega(y)$ che è soluzione singolare e per tutti i punti della quale è

$$\Omega'_y = 0$$

$$\Omega'_x = 0$$

Tale soluzione singolare non è evidentemente un inviluppo ed è definita *luogo geometrico di punti singolari*.

(1.3)► $4y'^2 - 9x = 0$ → img03

Ponendo

$$y' = p$$

si ha

$$4p^2 - 9x = 0 \Rightarrow p = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x} = y'$$

Integrando otteniamo la soluzione generale

a) $y = \pm\sqrt{x^3} + C \Rightarrow (y+C)^2 = x^3$

che rappresenta una famiglia di parabole semicubiche evidentemente appoggiata sull'asse delle y.

Ma procediamo con ordine.

Cerchiamo soluzioni singolari derivando prima rispetto a C:

$$0 = 2y + 2C$$

poi eliminiamo il parametro C:

$$C = -y$$

b) $x = 0$

Ecco dunque che l'asse delle y è soluzione singolare della (1.3) perché non deducibile dalla a) per nessun valore di C. Verifichiamo immediatamente essere un luogo geometrico di punti singolari derivando a) rispetto ad x e ad y:

$$\Omega'_y = 2y + 2C = 0$$

$$\Omega'_x = 3x^2 = 0$$

Osservazioni finali.

- Al variare di C si ottengono sull'asse delle y tutti i punti singolari della b)
- a) e b) assieme costituiscono le uniche soluzioni della (1.3) che quindi non ha inviluppi
- I punti singolari della b) sono tacnodi della a)

1.4 Inviluppi curvilinei

Fin qui abbiamo svolto esercizi su equazioni il cui integrale generale è una curva e i cui inviluppi, se esistono, sono rette. L'equazione seguente fornisce l'esempio contrario di una famiglia di rette che ha come soluzioni singolari due curve che ne costituiscono l'inviluppo.

(1.4)► $xy'^2 - yy' + 1 = 0$ → img04

Esplicitiamo l'equazione in y:

$$y = \frac{xy'^2 + 1}{y'}$$

Poniamo $p = y'$ e deriviamo rispetto ad x con p funzione di x:

$$y = \frac{xp^2 + 1}{p}$$

$$y' = p = \frac{p\left(p^2 + 2xpp'\right) - p'\left(xp^2 + 1\right)}{p^2} = p + xp' - \frac{p'}{p^2}$$

$$xp' - \frac{p'}{p^2} = 0$$

da cui segue che

$$p' = 0 \Rightarrow p = C$$

pertanto, eliminando il parametro C otteniamo l'integrale generale

$$y = \frac{xC^2 + 1}{C}$$

che rappresenta una famiglia di rette simmetrica rispetto all'asse delle x

Derivando rispetto a C ed eliminando di nuovo C si ottengono gli integrali singolari che rappresentano due semi-parabole con asse l'asse delle x

$$0 = D_C\left(xC + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow 0 = x - \frac{1}{C^2} \Rightarrow C = \pm\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$y = \frac{1+1}{\pm\sqrt{\frac{1}{x}}} = \pm 2x\sqrt{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{x}$$

(1.5)► $y'^2 - 4xy' + 4y = 0$ → img05

L'equazione è simile alla precedente ma ha per soluzioni due funzioni pari e quindi le curve sono simmetriche rispetto all'asse delle y: si tratta di una parabola piantata nell'origine con asse l'asse delle y che è inviluppo di una famiglia di rette.

$$y = \frac{4xy' - y'^2}{4} \Rightarrow y = \frac{4xp - p^2}{4} = xp - \frac{p^2}{4}$$

$$y' = p = p + xp' - \frac{pp'}{2}$$

$$p' = 0 \Rightarrow p = C$$

ecco l'integrale generale

$$y = xC - \frac{C^2}{4}$$

Derivando rispetto a C si ha

$$0 = x - \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2x$$

$$y = 2x^2 - \frac{4x^2}{4}$$

ed ecco l'integrale singolare

$$y = x^2$$

2. Equazioni di Clairaut

Un'equazione del tipo

a) $y = xy' + \varphi(y')$

e' detta di Clairaut e per essa il calcolo della la soluzione generale è immediato perché si dimostra che

b) $y = xC + \varphi(C)$

che rappresenta una famiglia di rette.

Infatti ponendo $p = y'$, sostituendo in a) e derivando rispetto ad x si ha

$$p = xp' + p + \varphi'(p)p' \Rightarrow p'(x + \varphi'(p) = 0)$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ha $p' = 0$ e quindi derivando $p = C$ e sostituendo in a) si ha l'integrale generale b).

L'equazione di Clairaut inoltre ha sempre un inviluppo curvilineo che si calcola col metodo già visto della derivazione dell'integrale generale rispetto a C che, conducendo all'eliminazione di C, fornisce una soluzione che non dipende da C e quindi è singolare.

$$\begin{cases} y = xC + \varphi(C) \\ D_p(y) = D_p(xC + \varphi(C)) \Rightarrow 0 = x + \varphi'(C) \end{cases}$$

(2.1)► $y = xy' + y' - y'^2$ → img06

Per trovare l'integrale generale si pone semplicemente

$$y' = C$$

$$y = Cx + C - C^2$$

L'integrale generale rappresenta una famiglia di rette simmetrica rispetto all'asse $x = -1$.

Per trovare l'inviluppo deriviamo rispetto a C:

$$0 = x + 2C \Rightarrow C = \frac{x+1}{2}$$

sostituiamo nell'integrale generale eliminando C:

$$y = \frac{x^2 + x}{2} + \frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} \Rightarrow 4y = 2x^2 + 2x + 2x + 2 - x^2 - 2x - 1$$

e troviamo l'inviluppo curvilineo

$$4y = (x+1)^2$$

che rappresenta una parabola poggiata sull'asse delle x con asse $x = -1$

(2.2)► $y = xy' + e^{y'}$ → img07

Anche in questo caso l'integrale generale è immediato

$$y = xC + e^C$$

e rappresenta una famiglia di rette.
Derivando rispetto a C si ha
$0 = x + e^C$
Le due ultime espressioni formano un sistema che va risolto per trovare l'integrale singolare
$e^C = -x \Rightarrow C = \ln(-x)$
$y = x[\ln(-x) - 1]$
Il campo di esistenza dell'inviluppo è $x < 0$

(2.3)► $y = y'x + \dfrac{1}{y'}$ → img08
Applicando la formula risolutiva otteniamo come integrale generale
$y = \dfrac{xC^2 + 1}{C}$ con $C \neq 0$
Per trovare l'integrale singolare deriviamo rispetto a C
$0 = \dfrac{2xC^2 - xC^2 - 1}{C^2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{C^2}$
Esplicitiamo C e sostituiamolo nell'integrale generale
$C = \pm\sqrt{\dfrac{1}{x}}$
$$y = \frac{x \cdot \frac{1}{x} + 1}{\pm\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{\pm 2\sqrt{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x$$
L'integrale generale è dunque una famiglia di rette simmetrica rispetto all'asse delle y e quello singolare una parabola con asse l'asse delle y.
Non esiste una soluzione particolare per $C = 0$.

3. Equazioni di Lagrange (o D'Alembert-Lagrange)

Sono equazioni del tipo
$y = x\varphi(y') + \psi(y')$
nel quale se si pone
$\varphi(y') = y'$
si ottiene evidentemente l'equazione di Clairaut che pertanto si considera un'equazione di Lagrange particolare.
Anche questo tipo di equazioni si risolve con l'introduzione del parametro p.

(3.1)► $y = xy'^2 + y'^2$ → img09
Poniamo
$p = y'$
da cui
a) $y = xp^2 + p^2$
b) $y' = p = p^2 + 2xpp' + 2pp' \Rightarrow (1 - p) = \dfrac{dp}{dx}(2x + 2) \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2}{1 - p}(x - 1)$
L'equazione ottenuta è lineare in x e pertanto integriamo

$$\int \frac{1}{x+1}dx = 2\int \frac{1}{1-p}dp \Rightarrow \ln\left|(x+1)\right| = -2\ln\left|(p-1)\right| + \ln C \Rightarrow x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}$$

per l'arbitrarietà della costante C possiamo scrivere

$$x+1 = \frac{C^2}{(p-1)^2} \Rightarrow p = \frac{C}{\sqrt{x+1}} + 1$$

da cui sostituendo in a) otteniamo l'integrale generale

$$y = C^2 + x + 1 + 2C\sqrt{x+1} = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2$$

Per trovare l'integrale singolare, se esiste, consideriamo che il metodo visto in precedenza di derivare rispetto a C per poi esplicitare e sostituire nell'integrale generale in questo caso non porta a nulla.
Osserviamo invece che in b) se

$$p' = 0$$

allora

$$p = p^2$$

e che ciò avviene solo se p è costante ed uguale a

$$p = (0,1)$$

In conseguenza di ciò avremo due soluzioni singolari date da

$$y = 0$$

$$y = x + 1$$

ma delle due solo la prima è un integrale singolare in quanto non deducibile dall'integrale generale per alcun valore di C, mentre la seconda è deducibile dall'integrale generale per $C = 0$.
Ed infatti l'asse delle x è inviluppo della famiglia di curve rappresentata dall'integrale generale.

(3.2)► $y = 2y'x + \dfrac{1}{y'}$

Alle volte, come per questa equazione, non è possibile ricavare un integrale generale in forma né esplicita né implicita ma solamente in forma parametrica.
Introduciamo il parametro p e deriviamo

$$y = 2px + \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = 2p + \frac{2xdp}{dx} - \frac{dp}{dxp^2} \Rightarrow \frac{pdx}{dp} = \frac{2pdx}{dp} + 2x - \frac{1}{p^2} \Rightarrow -\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{p} - \frac{1}{p^3}$$

Con questi passaggi otteniamo un'equazione lineare in x

a) $x' + x\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{p^3}$

Per trovare l'integrale generale di questa equazione lineare adottiamo il metodo della equazione ridotta corrispondente visto nella seconda parte di questo lavoro.
L'equazione ridotta corrispondente è pertanto

$$x' + x\frac{2}{p} = 0$$

che ha per integrale generale

$$x = C(p)e^{-A(p)}$$

dove $A(p)$ è una primitiva di $\dfrac{2}{p}$ e $C(p)$ è una funzione di p da determinare; dunque avremo

b) $x = C(p)e^{-2\ln p} = \dfrac{C(p)}{p^2}$

Per sapere cosa vale $C(p)$ deriviamo l'espressione precedente

$$x' = \frac{dC(p)}{dp}\frac{1}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3}$$

sostituiamo in a) i valori di x, x' trovati

$$\frac{dC(p)}{dp}\frac{1}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3} + \frac{C(p)}{p^2}\frac{2}{p} = \frac{1}{p^3}$$

Ora possiamo integrare per sostituire $C(p)$ con una costante arbitraria C

$$\int dC(p) = \int \frac{1}{p}dp + C \Rightarrow C(p) = \ln|p| + C$$

Sostituendo in b) otteniamo l'integrale generale della (3.2) in forma parametrica

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}\left(\ln|p| + C\right) \\ y = 2px + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

Per trovare l'integrale singolare, se esiste, esprimiamolo in forma parametrica con p come parametro:

$$\begin{cases} y = 2px + \dfrac{1}{p} \\ 0 = 2x - \dfrac{1}{p^2} \end{cases}$$

Con una semplice sostituzione otteniamo

$$p = \frac{\sqrt{2x}}{2x}$$

c) $y = \pm 2\sqrt{2x}$

Questa soluzione, non dipendendo dal parametro p è una soluzione singolare, a patto però che sia soluzione della (3.2) ! Vediamo se trasforma la (3.2) in identità:

$$2y'x + \frac{1}{y'} = y$$

$$2D\left(2\sqrt{2x}\right)x + \frac{1}{D\left(2\sqrt{2x}\right)} = 2\sqrt{2x}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2x}}{2} \neq 2\sqrt{2x}$$

Come si vede ciò non accade e quindi c) non è soluzione della (3.2) e la famiglia di curve rappresentata dall'integrale generale non ha né inviluppi né luoghi geometrici di punti singolari.

(3.3)► $y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)$ → img10

Anche in questo esercizio, mediante l'introduzione del parametro p, ricaveremo un'equazione lineare in x che poi potremo integrare per ottenere l'integrale generale in forma parametrica.

$$y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right)$$

$$y' = p = \frac{1}{2}\left(p + \frac{4}{p}\right) + \frac{x}{2}\left(p' - \frac{4p'}{p^2}\right) \Rightarrow \frac{p^2 - 4}{p} = x\frac{dp}{dx}\left(\frac{p^2 - 4}{p^2}\right) \Rightarrow p = \frac{xdp}{dx}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{p}dp + C \Rightarrow \ln|x| = \ln|p| + \ln|C|$$

$$\begin{cases} x = Cp \\ y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right) \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{2C} + 2C \Rightarrow \frac{x^2}{C} + C$$

L'integrale generale rappresenta una famiglia di parabole.
Non esistono soluzioni particolari per $C = 0$
L'integrale singolare, un inviluppo costituito da due rette, è immediatamente identificabile eseguendo l'elementare derivazione su C

$$0 = -\frac{x^2}{C^2} + 1 \Rightarrow C = \pm x$$

$$y = \pm 2x$$

(3.4)► $y = 2xy' + y'^2$
Introduciamo il parametro p e ricaviamo un'equazione lineare in x

$$p = y' \Rightarrow y = 2xp + p^2$$

$$y' = p = 2p + 2xp' + 2pp' \Rightarrow -p = \frac{dp}{dx}(2x + 2p) \Rightarrow -\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{p} + 2$$

$$x' + \frac{2x}{p} + 2 = 0$$

Possiamo risolvere l'equazione lineare col metodo del prodotto di due funzioni visto nella seconda parte di questo lavoro

$$x = uv$$

$$x' = u\frac{dv}{dp} + v\frac{du}{dp}$$

$$u\frac{dv}{dp} + v\frac{du}{dp} + \frac{2}{p}uv + 2 = 0$$

$$u\left(\frac{dv}{dp} + \frac{2v}{p}\right) + v\frac{du}{dp} = -2$$

$$\frac{dv}{dp} + \frac{2v}{p} = 0$$

$$\int \frac{1}{v}dv = -2\int \frac{1}{p}dp$$

$$\ln|v| = -2\ln|p| \Rightarrow v = \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^2}\frac{du}{dp} = -2$$

$$\int du = -2\int p^2 dp + C \Rightarrow u = C - \frac{2}{3}p^3$$

L'integrale generale espresso in forma parametrica sarà pertanto

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2}{3}p \\ y = 2xp + p^2 \end{cases}$$

Anhe se non se ne vede una particolare utilità, possiamo esplicitare y in funzione di p ponendo

$$C = \frac{C}{3} \Rightarrow x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2p}{3}$$

$$y = 2p\left(\frac{C}{3p^2} - \frac{2p}{3}\right) + p^2 = \frac{2C - p^3}{3p}$$

Per trovare un eventuale integrale singolare formiamo il sistema

$$\begin{cases} y = 2xp + p^2 \\ 0 = 2x + 2p \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $y = -x^2$ che però, sostituita nella (3.4) non risulta soddisfarla e pertanto se ne deduce che per la nostra equazione differenziale non esiste un integrale di frontiera.

Fine della quarta parte■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo:
www.4dmatrix.it/math