EQUAZIONI DIFFERENZIALI 5

Elementi di teoria sulle equazioni lineari omogenee di ordine *n*
Risoluzione delle equazioni lineari omogenee del secondo ordine

di Leonardo Calconi

15.02.2008

1. Elementi di teoria sulle equazioni lineari di ordine *n*

Note.
Non credo ce ne sia bisogno, ma ricordo che nel contesto delle equazioni differenziali le due parole 'integrale' e 'soluzione' hanno lo stesso significato e che quindi le adopererò indistintamente.
Poiché in questo lavoro si parla esclusivamente di 'equazioni differenziali lineari' per comodità talvolta potrò omettere uno o tutti e due gli aggettivi.
Gli esercizi sono segnalati con ►.

1.1 Equazioni lineari di ordine *n*
Nel ricordare che per ordine di un'equazione differenziale si intende il massimo ordine di derivata che vi compare, nella sua forma più generale un'equazione differenziale lineare di ordine *n* è del tipo
(1.1) $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$
dove i coefficienti ed il termine noto sono funzioni date di *x* continue per tutti i valori di *x* in un dato intervallo $[a,b]$ o sono costanti. Tale equazione, proprio per la presenza del termine noto, è *non omogenea*.

1.2 Equazioni lineari omogenee di ordine *n*
Se il termine noto $f(x)$ è uguale a zero l'equazione si dice *omogenea* ed è quindi della forma
(1.2) $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$
Se esistono dei valori di *x* per i quali $a_0 = 0$ i punti relativi sono detti *punti singolari* e generano delle complicazioni di calcolo che esulano dai limiti di questo lavoro. Pertanto supporremo sempre che sia $a_0 \neq 0$, il che ci permette di dividere ciascun termine dell'equazione per a_0 ed ottenere
(1.3) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$
ricordando che essendo $a_1,...,a_n$ funzioni di *x,* anche $\frac{a_1}{a_0},...,\frac{a_n}{a_0}$ lo sono e pertanto è lecito utilizzare la notazione $a_1 = \frac{a_1}{a_0},...,a_n = \frac{a_n}{a_0}$.
La (1.3) è detta *forma normale* dell'equazione omogenea.

1.3 Equazioni ridotte corrispondenti
Se l'equazione non è omogenea chiamiamo *equazione ridotta corrispondente* l'equazione omogenea che da essa si ricava ponendo $f(x) = 0$. Ciò torna utile nel calcolo dell'integrale generale di un'equazione non omogenea che però non è trattato in questo lavoro.

1.4 Equazioni a coefficienti variabili e a coefficienti costanti
Se i coefficienti $a_1,...a_n$ sono funzioni di *x* l'equazione si dice a *coefficienti variabili*; se essi sono invece delle costanti l'equazione si dice a *coefficienti costanti.*
Non esiste un metodo diretto di risoluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti variabili di ordine $n > 2$ *che permetta di determinare la soluzione generale in forma*

finita. Per le equazione omogenee di ordine due il metodo esiste a patto che si conosca almeno una soluzione particolare (paragrafo 1.11).

1.5 Teorema di esistenza ed unicità
Per le equazioni differenziali lineari di ordine *n* vale il *teorema di esistenza ed unicità* già visto trattando delle equazioni del primo ordine. La sua dimostrazione non è compresa in questo lavoro.

1.6. Spazi lineari, trasformazioni lineari, equazioni lineari
L.I. sta per 'linearmente indipendente' e L.D. per 'linearmente dipendente'.
Vediamo perché un'equazione differenziale omogenea del tipo (1.3) è detta *lineare*.
Sappiamo che l'insieme delle funzioni $y = f(x)$ continue in un dato intervallo $[a,b]$ è uno spazio lineare reale $\mathscr{L}$ (se tali funzioni sono ovviamente a valori reali).
E sappiamo che quelle funzioni che sono derivabili fino all'ordine *n* costituiscono un sottospazio $\mathscr{L}_n$ di $\mathscr{L}$.
Consideriamo la trasformazione
L: $\mathscr{L}_n \to \mathscr{L}$
tale che
$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$
dove $a_1,...,a_n$ sono funzioni date di $\mathscr{L}$.
Tale trasformazione è *lineare* perché
$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
$L(Cy) = CL(y)$
e pertanto un'equazione del tipo (1.3)
$L(y) = 0$
è parimenti *lineare*.
Tale equazione ha tra gli integrali particolari *n* funzioni $y_1,..., y_n \in \mathscr{L}_n$ *L.I.* che tutte assieme formano una base di $\mathscr{L}_n$ che a sua volta costituisce il nucleo di *L* di dimensione *n.*
Possiamo chiamare questo insieme massimale di elementi *L.I.* come *sistema fondamentale di soluzioni* per l'equazione cui si riferiscono.
Ovviamente la dimensione di $\mathscr{L}_n$ è infinita in quanto, come conseguenza della linearità, si ha che è integrale particolare anche ogni combinazione lineare della base di $\mathscr{L}_n$
$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_{y_n}$ con $c_1, c_2,..., c_n \in \mathbb{R}$
il che porta al seguente teorema**.**

1.7 Teorema fondamentale sulle equazioni lineari omogenee
Se $y_1, y_2,..., y_n$ *sono soluzioni L.I. dell'equazione e* $C_1, C_2,..., C_n$ *sono costanti, la combinazione lineare* $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ *è soluzione generale dell'equazione.*
Il teorema è dimostrato se proviamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni particolari e le ennuple $C_1,..., C_n$, ovvero se mostriamo che ogni soluzione particolare è rappresentabile mediante un'unica combinazione lineare di *n* soluzioni particolari *L.I.*
Per fare ciò scegliamo un punto x_0 qualsiasi nell'intervallo di definizione $[a,b]$ e mostriamo che la soluzione particolare y_0 in quel punto è combinazione lineare degli elementi del sistema fondamentale di soluzioni. Per ottenere ciò scriviamo un sistema di *n* equazioni lineari nelle incognite $C_1,..., C_n$:

$$(1.4)\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = y_0 \\ C_1y_1' + C_2y_2' + ... + C_ny_n' = y_0' \\ ... \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema è nullo perché per ipotesi è composto di elementi *L.I.* Tale sistema ammette quindi una sola soluzione $C_1, C_2, ..., C_n$ e pertanto è dimostrato che tale ennupla è l'unica che verifica la prima equazione del sistema, ovvero l'uguaglianza

$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$

Poiché la dimostrazione è stata eseguita su un punto qualsiasi dell'intervallo di definizione essa è valida per tutti i punti di tale intervallo e pertanto ne deduciamo che l'integrale generale di un'equazione omogenea sarà costituito dall'insieme di tutte le soluzioni particolari espresse come combinazioni lineari degli elementi del sistema fondamentale di soluzioni, ovvero della forma

$$(1.5)\; y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{n} C_ky_k$$

La matrice dei coefficienti del sistema (1.4) è detta *matrice di Wronsky* e i suo determinante *determinante di Wronsky* o *wronskiano*

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(W) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Vale appena la pena di sottolineare come la matrice di Wronsky sia di rango *n* o non singolare se e solo se il suo determinante è nullo e viceversa il wronskiano sia nullo se e solo se sua matrice di Wronsky è di rango *n*. Una dimostrazione è al paragrafo 1.10.

In seguito, per comodità e dal momento che la notazione per la matrice di Wronsky non entrerà più in ballo, il wronskiano sarà indicato con W.

1.8 Equazioni del primo ordine corrispondenti

Il teorema fondamentale sulle equazioni lineari omogenee può essere utilizzato per risolvere equazioni le cui soluzioni particolari siano di facile determinazione.

Data l'equazione omogenea

$$(1.6)\blacktriangleright\; y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$$

si vede ad occhio che l'equazione ammette le due soluzioni particolari

$$y_1 = x,\; y_2 = \frac{1}{x}$$

che sono chiaramente non proporzionali; infatti il loro wronskiano è

$$W = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0$$

Pertanto l'integrale generale della (1.6) sarà la combinazione lineare delle due soluzioni particolari

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

Altri due esempi di calcolo diretto dell'integrale generale sono:
(1.7)► $y''-2y'+y=0$
$y_1=e^x,\ y_2=xe^x$
$y=C_1e^x+C_2xe^e$
(1.8)► $y''+y=0$
$y_1=\sin x,\ y_2=\cos x$
$y=C_1\sin x+C_2\cos x$
Questi semplici esercizi ci permettono di scoprire che W è un integrale particolare della *equazione del primo ordine corrispondente*
(1.9) $y'+a_1y=0$
che nel caso della (1.6) è
$$y'+\frac{y}{x}=0$$
Infatti, risolvendo per separazione delle variabili si trova l'integrale generale
$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x}dx+C\Rightarrow\ln|y|=\ln C-\ln|x|\Rightarrow y=\frac{C}{x}$$
e quindi l'integrale particolare per $C=-2$
$$y_{(-2)}=-\frac{2}{x}=W$$
Si vede abbastanza facilmente che nel caso della (1.7) si ha
$W=e^{2x}$
che è soluzione particolare dell'equazione del primo ordine corrispondente
$y'-2y=0$
mentre per la (1.8) si ha banalmente
$W=1$
$y'=0$
Il risultato di questo paragrafo può essere generalizzato col seguente teorema.

1.9 Teorema sul determinante di Wronsky
Il wronskiano soddisfa l'equazione differenziale del primo ordine
(1.10) $W'+a_1W=0$
Per dimostrarlo è necessario riesumare alcune proprietà dei determinanti.
a) La derivata del determinante di una matrice quadrata è uguale alla somma dei determinanti ottenuti derivando in ciascuno una riga diversa.
E' evidente allora che i primi $n-1$ determinanti avranno due righe uguali e quindi saranno nulli mentre l'ennesimo sarà diverso da zero:
$$W'=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n\end{vmatrix}=0+\dots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n\end{vmatrix}$$
b) Se ciascun elemento della riga i-esima di un determinante è la somma di k addendi, tale determinante è uguale alla somma di k determinanti composti come segue:
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & e\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ d & f\end{vmatrix}$$

Ora, poiché è
$y_1^n + a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_n y_n = 0 \Rightarrow y_1^n = -\left(a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_n y_n\right)$
sostituendo nell'ennesima riga di W' come sopra trovato potremo scomporlo in *n* determinanti tutti uguali a zero perché aventi due righe proporzionali tranne uno che varrà
$W' = -a_1 W$
da cui
$W' + a_1 W = 0$ *c.v.d.*
Ciò ci permette di dimostrare un altro teorema.

1.10 Teorema sulla matrice di Wronsky
La matrice wronskiana di n soluzioni particolari L.I. è non singolare.
L'equazione (1.10) si risolve facilmente per separazione delle variabili ponendo $A = \int_{x_0}^{x} a_1 dx$

$$\frac{dW}{dx} = -a_1 W \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W} dW = C - \int_{x_0}^{x} a_1 dx \Rightarrow \ln W = \ln C - A$$

(1.11) $W = Ce^{-A}$
Ponendo come condizione iniziale $x = x_0$ si ha $A = 0$ e quindi $W_0 = C$
per cui la soluzione che soddisfa tale condizione iniziale è l'*identità di Abel*
(1.12) $W = W_0 e^{-A}$
Ora, poiché la funzione esponenziale non si annulla mai, se ne deduce che il wronskiano è diverso da zero per qualsiasi valore di *x* in $[a, b]$ e che quindi la matrice wronskiana è non singolare in tale intervallo.
Quest'ultimo risultato ci permette di dimostrare un teorema mediante il quale si può calcolare l'integrale generale di un'equazione omogenea del secondo ordine anche se si conosce una sola soluzione particolare.

1.11 Teorema sulle equazioni omogenee del secondo ordine
Se è data una sola soluzione particolare y_1 di un'equazione omogenea del secondo ordine, la seconda soluzione particolare L.I. y_2 sarà data da

(1.13) $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-A}}{y_1^2} dx$

In base alla (1.11) possiamo scrivere
(1.14) $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-A}$
dove y_1 è soluzione nota e y_2 è soluzione da determinare in modo che le due siano *L.I.* Ottenuta y_2 sarà sufficiente applicare il teorema fondamentale sulle equazioni omogenee lineari per ottenere anche l'integrale generale. Per arrivare dalla (1.14) alla (1.13) dividiamo ambo i membri della (1.14) per y_1^2

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{Ce^{-A}}{y_1^2}$$

Essendo il primo membro una derivata possiamo scrivere

$$\frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = \frac{Ce^{-A}}{y_1^2}$$

e quindi integrare

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{Ce^{-A}}{y_1^2}dx+C_1$$

Ma C,C_1 sono costanti arbitrarie e poiché cerchiamo una soluzione particolare possiamo porre $C=1,C_1=0$ per ottenere esattamente la (1.13).

Esempio. Sia data l'equazione

(1.15)► $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$

E' elementare verificare che essa ha come soluzione particolare

$y_1=x$

Per trovare un'altra soluzione particolare la prima cosa da fare è ricondurre l'equazione alla sua forma normale liberandoci del coefficiente a_0 (vedi paragrafo 1.2)

$$y''-\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}y'+\frac{2}{\left(1-x^2\right)}y=0$$

Ora possiamo calcolare l'integrale A

$$A=-\int\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}dx=-\ln\left|1-x^2\right|$$

e quindi impostare la seconda soluzione particolare

$$y_2=x\int\frac{e^{-\ln\left|1-x^2\right|}}{x^2}dx=x\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)}dx$$

Per risolvere questo integrale scomponiamolo in una somma di integrali più semplici

$$y_2=x\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)}\right)dx=x\left[\int\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-x)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x)}dx\right]$$

$$y_2=x\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right)=\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$$

E' fatta. Applicando ora il teorema fondamentale sulle equazioni omogenee avremo l'integrale generale

$$y=C_1x+C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1\right)$$

2 Esercizi sulle equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

2.1 Equazione caratteristica di un'equazione omogenea a coefficienti costanti

Sia data un'equazione omogenea a coefficienti costanti $a_1,...,a_n$ di ordine *n*

$$y^n+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0$$

Si dimostra che *n* integrali particolari *L.I.* sono dati da

$e_1^{k_1x},e_2^{k_2x},...,e_n^{k_nx}$

con $k_1,k_2,...,k_n$ lotto di soluzioni dell'equazione ordinaria detta *equazione caratteristica* dell'equazione differenziale e data da

(2.1) $k^n+a_1k^{n-1}+...+a_n=0$

il cui primo membro è detto *polinomio caratteristico*.

Sia data l'equazione

(2.2)► $2y''' + y'' - 2y' - = 0$

Riduciamola in forma normale

$$y''' + \frac{1}{2}y'' - y' - \frac{1}{2}y = 0$$

La sua equazione caratteristica è quindi

$$k^3 + \frac{1}{2}k^2 - k - \frac{1}{2} = 0$$

della quale è fin troppo facile vedere che ha come soluzioni

$$k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = -\frac{1}{2}$$

L'integrale generale della (2.2) sarà pertanto

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{-\frac{x}{2}}$$

Ma solitamente determinare le soluzioni di equazioni ordinare di grado $n > 2$ non è così banale e poiché tale calcolo non è argomento che possa essere trattato in questo lavoro, ci limiteremo ad una semplice dimostrazione dell'assunto di questo paragrafo per $n = 2$ e allo svolgimento di alcuni esercizi.

Sia data l'equazione

(2.3) $y'' + a_1y' + a_2y = 0$

Mostriamo prima che le soluzioni particolari possono essere del tipo

(2.4) $y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{kx}$

dove *k* è una costante. Calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione data avremo

$$k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_2e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + a_1k + a_2\right) = 0$$

e poiché la funzione esponenziale non si annulla mai ce la possiamo tranquillamente togliere dai piedi scrivendo infine l'equazione caratteristica della (2.3)

(2.5) $k^2 + a_1k + a_2 = 0$

E' evidente che se *k* è soluzione della (2.5) allora le (2.4) sono determinate effettivamente come soluzioni particolari della (2.3).

Che esse siano *L.I.* è banalmente dimostrato dalla combinazione lineare

$$c_1e^{k1x} + c_2e^{k2x} = 0$$

verificata solo per $c_1, c_2 = 0$ in quanto la funzione esponenziale non si annulla mai.

A questo punto abbiamo a che fare con un'equazione ordinaria di secondo grado che può avere:

- due radici reali e distinte per $\Delta \neq 0$
- due radici reali coincidenti per $\Delta = 0$
- due radici complesse coniugate per $\Delta < 0$

dove $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ è il discriminante dell'equazione caratteristica.

Riassumiamo le forme dell'integrale generale nei tre casi che dimostreremo strada facendo:

- $\Delta \neq 0 \Rightarrow y = C_1y_1 + C_2y_2$
- $\Delta = 0 \Rightarrow y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow y = C_1e^{mx}\cos nx + C_2e^{mx}\sin nx$

Una volta acquisite queste tre formulette, la risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti è veramente banale per cui ne porteremo solo pochi esercizi dimostrativi.

2.2 Esercizi con soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica
Se $\Delta \neq 0$ le due soluzioni particolari dell'equazione omogenea sono *L.I.* perché il loro rapporto non può essere una costante

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{x(k_1 - k_2)}$$

(2.6)► $y'' - 5y' + 6y = 0$
l'equazione caratteristica è
$k^2 - 5k + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 \neq 0$ con soluzioni reali e distinte

$$k_1, k_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 3, 2$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione (2.6) è

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

(2.7)► $y'' \pm y' = 0$

$$k(k \pm 1) = 0,\ k_1, k_2 = 0, \mp 1$$

$$y = C_1 + C_2 e^{\mp x}$$

(2.8)► $\dfrac{y - 2y'}{y''} = 3$
Riduciamo l'equazione a forma normale

$$y'' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}y = 0$$

$$k^2 + \frac{2}{3}k - \frac{1}{3} = 0,\ \Delta = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} \neq 0,\ k_1, k_2 = \frac{1}{3}, -1$$

$$y = C_1 e^{\frac{x}{3}} + C_2 e^{-x}$$

2.3 Esercizi con soluzioni reali e coincidenti dell'equazione caratteristica
E' ovvio che se le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono, coincidono anche le soluzioni particolari dell'equazione omogenea che quindi sono *L.D.*
E' necessario pertanto trovare un'altra soluzione particolare dell'equazione caratteristica che non sia proporzionale alle due coincidenti.
Si dimostra che se $y_1 = e^{k_1 x}$ è la prima soluzione, un'altra soluzione particolare *L.I.* è

$$y_2 = xe^{k_1 x} = xy_1 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{cost.}$$

Ipotesi: $y_2 = g(x)e^{k_1 x}$
Tesi: $g(x) = x$
Dimostrazione.
Deriviamo due volte l'ipotesi

$$y_2' = g'(x)e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} g(x) = e^{k_1 x}\left(g'(x) k_1 g(x)\right)$$

$$y_2'' = g''(x)e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} g'(x)e^{k_1 x} + k_1^2 e^{k_1 x} g(x) + g'(x) k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left(g''(x) + 2k_1 g'(x) + k_1^2 g(x)\right)$$

Adesso sostituiamo le derivate nell'equazione omogenea

$$e^{k_1 x}\left(g''(x) + 2k_1 g'(x) + k_1^2 g(x)\right) + a_1 e^{k_1 x}\left(g'(x) k_1 g(x)\right) + a_2 e^{k_1 x} g(x) = 0$$

$$e^{k_1 x}\left(g''(x) + (2k_1 + a_1) g'(x) + \left(k_1^2 + a_1 k_1 + a_2\right) g(x)\right) = 0$$

Dal momento che l'equazione caratteristica è
$k_1^2 + a_1 k_1 + a_2 = 0$
e dal momento che il suo $\Delta = 0$ e che quindi le sue soluzioni valgono
$k_1 = k_2 = -\dfrac{a_1}{2}$
si ha anche
$2k_1 + a_1 = 0$
e pertanto resta soltanto
$e^{k_1 x} g''(x) = 0$
Poiché la funzione esponenziale non si annulla mai, ciò che resta da risolvere è
$g''(x) = 0$
Integrando due volte e cambiando segno alle costanti arbitrarie si ottiene
$g'(x) + C_1 = 0 \Rightarrow g(x) + C_2 + xC_1 = 0 \Rightarrow g(x) = xC_1 + C_2$
il che vale
$g(x) = x$
se poniamo $C_2 = 0,\ C_1 = 1$ *c.v.d.*
(2.9)► $y'' - 6y' + 9y = 0$
Si vede subito che per l'equazione caratteristica è $\Delta = 0$ e $k_1, k_2 = 3$.
Pertanto l'integrale generale sarà
$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

2.4 Esercizi con soluzioni complesse dell'equazione caratteristica
Se $\Delta < 0$ le soluzioni dell'equazione caratteristica sono
$$k_1, k_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \Rightarrow -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$
da cui, ponendo
$$m = -\frac{a_1}{2},\ n = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$
si hanno le due soluzioni complesse coniugate
$k_1, k_2 = m \pm in$
da cui le soluzioni particolari dell'equazione omogenea
$y_1, y_2 = e^{(m \pm in)x}$
ovvero, ricordando la proprietà della funzione esponenziale complessa
$e^z = e^a(\cos b + i\sin b),\ z = a + ib$
$y_1, y_2 = e^{mx}(\cos nx \pm i\sin nx)$
Le due soluzioni particolari sono funzioni complesse di argomento reale e quindi se esse soddisfano l'equazione omogenea anche le due soluzioni reali seguenti la soddisferanno
$y_1 = e^{mx}\cos nx,\ y_2 = e^{mx}\sin nx$
soluzioni che sono *L.I.* in quanto
$\dfrac{y_1}{y_2} = \cot nx \neq \text{cost.}$
Pertanto l'integrale generale sarà
$y = C_1 e^{mx}\cos nx + C_2 e^{mx}\sin nx$

(2.10)► $y'' + 2y' + 5y = 0$
E' chiaramente $\Delta < 0$ e pertanto le soluzioni dell'equazione caratteristica sono
$k_1, k_2 = -1 \pm i\sqrt{1-5} = -1 \pm i2$
con le quali si costruisce l'integrale generale della (2.10)
$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$
(2.11)► $y'' + y' + y = 0$
$$k_1, k_2 = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$
(2.12)► $y'' + y = 0$
Se $a_1 = 0$ allora $m = 0 \Rightarrow e^{mx} = 1$
e pertanto si hanno soluzioni puramente immaginarie per l'equazione caratteristica:
$k_1, k_2 = \pm in = \pm ia_2$
da cui la forma dell'integrale generale
$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$
che per la (2.12) vale
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Fine della quinta parte■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo:
www.4dmatrix.it/math