

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI 6

Equazioni lineari non omogenee

Calcolo di un integrale particolare col metodo di Lagrange e col metodo di Cauchy

di Leonardo Calconi

05.03.2008

## 1 Integrale generale di equazioni lineari non omogenee

Una tale equazione in forma normale è del tipo

$$(1.1) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

Nel ricordare che definiamo *equazione omogenea corrispondente* la (1.1) nella quale si sia posto il termine noto uguale a zero

$$(1.2) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

si dimostra che la sua soluzione generale è data da

$$(1.3) \quad y = z + w$$

dove

$z = c_1 y_1, \dots, c_n y_n$  soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente

$w = y_0$  soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Ipotesi:

$y_1, \dots, y_n$  sono *L.I.* e quindi sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea

Tesi:

$$(1.4) \quad y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_0$$

● Dimostrazione.

Consiste nel mostrare per ogni soluzione particolare  $(x_0, y_0, w_0)$  della (1.1) esiste una sola ennupla

$c_1, \dots, c_n$  che soddisfa

$$(1.5) \quad y_0 = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + w_0$$

Scriviamo il sistema seguente nelle incognite  $c_1, \dots, c_n$

$$\begin{cases} c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = y_0 - w_0 \\ c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' = y_0' - w_0' \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - w_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Per ipotesi il wronskiano dell'equazione omogenea corrispondente è nullo e quindi questo sistema ammette una sola soluzione  $c_1, \dots, c_n$  che soddisfa la prima equazione del sistema, ovvero la (1.5) e, per il teorema di esistenza ed unicità, anche la (1.4).

Quindi il problema del calcolo dell'integrale generale della (1.3) consiste nel trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente (o, il che è lo stesso,  $n$  suoi integrali particolari *L.I.*) e un integrale particolare della (1.3) stessa.

Nella quinta parte di questo lavoro dedicato alle equazioni differenziali abbiamo trattato i metodi per il calcolo dell'integrale generale di equazioni omogenee.

Ora, per poter applicare la (1.3), ci occorre un metodo per il calcolo di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Mostreremo due metodi per il calcolo dell'integrale particolare dell'equazione non omogenea: quello di *Lagrange* e, dopo un paragrafo dedicato agli esercizi, quello di *Cauchy*.

Poiché i due metodi implicano come è ovvio un'integrazione, la scelta dell'uno o dell'altro metodo dipende dalla complessità delle funzioni da integrare.

## 2 Metodo di Lagrange

Tale metodo si propone di trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea di tipo

$$(2.1) y_0 = \sum_{i=1}^n g_i y_i$$

analogo all'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

dove le  $y_i$  costituiscono il sistema fondamentale di tale equazione (cfr. parte quinta) e le  $g_i$  sono funzioni di  $x$  da determinare le cui derivate soddisfano il sistema seguente

$$(2.2) \begin{cases} g_1' y_1 + \dots + g_n' y_n = 0 \\ g_1' y_1' + \dots + g_n' y_n' = 0 \\ \dots \\ g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)} = f'(x) \end{cases}$$

Proprio perché si cerca una soluzione particolare nella quale le costanti arbitrarie sono sostituite con opportune funzioni di  $x$ , il metodo è detto comunemente

'di variazione delle costanti arbitrarie' o 'di variazione dei parametri'.

● Dimostriamolo.

È evidente che se  $y_0$  è soluzione particolare della (1.1) essa e le sue  $n-1$  derivate dovranno essere esprimibili come combinazioni lineari degli elementi del sistema fondamentale di soluzioni delle loro derivate

$$(2.3) \begin{cases} y_0 = g_1 y_1 + \dots + g_n y_n \\ y_0' = g_1 y_1' + \dots + g_n y_n' \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} = g_1 y_1^{(n-1)} + \dots + g_n y_n^{(n-1)} \end{cases}$$

inoltre  $y_0$  dovrà soddisfare la (1.1)

$$(2.4) y_0^n + a_1 y_0^{(n-1)} + \dots + a_n y_0 = f(x)$$

Ora eseguiremo alcune operazioni sul sistema (2.3) per arrivare al sistema (2.2) e quindi alla dimostrazione.

Deriviamo ciascuna delle prime  $n-1$  righe e sottraiamo da essa la riga successiva

$$y_0' - y_0' = g_1' y_1 + g_1 y_1' + \dots + g_n' y_n + g_n y_n' - g_1 y_1' - \dots - g_n y_n'$$

...

ottenendo il sistema seguente che teniamo momentaneamente da parte

$$(2.5) \begin{cases} g_1' y_1 + \dots + g_n' y_n = 0 \\ g_1' y_1' + \dots + g_n' y_n' = 0 \\ \dots \\ g_1' y_1^{(n-2)} + \dots + g_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

Ora, sempre sul sistema (2.3), deriviamo la riga  $n$ -esima

$$y_0^{(n)} = g_1 y_1^{(n)} + g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n y_n^{(n)} + g_n' y_n^{(n-1)}$$

ma scriviamola così

$$(2.6) y_0^{(n)} = g_1 y_1^{(n)} + \dots + g_n y_n^{(n)} + g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)}$$

Adesso prendiamo di nuovo il sistema (2.3) e aggiungiamogli la (2.6) e quindi moltiplichiamone ambo i membri della prima riga per  $a_n$ , quelli della seconda per  $a_{n-1}$  ..., quelli della penultima per  $a_1$  e quelli dell'ultima per 1 ottenendo il sistema seguente

$$(2.7) \left\{ \begin{array}{l} a_n y_0' = a_n g_1 y_1' + \dots + a_n g_n y_n' \\ a_{n-1} y_0' = a_{n-1} g_1 y_1' + \dots + a_{n-1} g_n y_n' \\ \dots \\ a_1 y_0^{(n-1)} = a_1 g_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_1 g_n y_n^{(n-1)} \\ y_0^{(n)} = g_1 y_1^{(n)} + \dots + g_n y_n^{(n)} + g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Di questo sistema consideriamo le somme per colonne e vediamo che, essendo  $y_1, \dots, y_n$  integrali dell'equazione omogenea corrispondente, otterremo alcune somme nulle

$$g_1 (a_n y_1 + a_{n-1} y_1' + \dots + a_1 y_1^{(n-1)} + y_1^{(n)}) = g_1 \cdot 0 = 0$$

...

e quindi il seguente risultato

$$(a_n y_0 + a_{n-1} y_0' + \dots + a_1 y_0^{(n-1)} + y_0^{(n)}) = (0) + \dots + (0) + (g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)})$$

Ma allora perché sia verificata la (2.4) sarà sufficiente che sia

$$(2.8) \quad g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Ora riprendiamo il sistema (2.5) che avevamo messo da parte e aggiungiamogli la (2.8)

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{l} g_1' y_1 + \dots + g_n' y_n = 0 \\ g_1' y_1' + \dots + g_n' y_n' = 0 \\ \dots \\ g_1' y_1^{(n-2)} + \dots + g_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ g_1' y_1^{(n-1)} + \dots + g_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right.$$

Otterremo un sistema (l'ultimo !) in  $n$  equazioni e  $n$  incognite  $g_1', \dots, g_n'$  che sono determinate in quanto il wronskiano dei coefficienti è per ipotesi diverso da zero.

Quadrando la soluzione del sistema (2.9)

$$g_1 = \int g_1', \dots, g_n = \int g_n'$$

si ricavano le funzioni di  $x$  da sostituire nella (2.1) per ottenere l'integrale particolare cercato dell'equazione non omogenea.

Applicando la (1.3) otteniamo l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + g_1 y_1 + \dots + g_n y_n$$

che troviamo più comodo scrivere nella forma seguente

$$(2.10) \quad y = (c_1 + g_1) y_1 + (c_2 + g_2) y_2 + \dots + (c_n + g_n) y_n$$

Ricapitolando, il lavoro da fare per integrare un'equazione lineare non omogenea col metodo di Lagrange è:

1. Eliminare, se presente e se possibile, il coefficiente della derivata di ordine massimo
2. Trovare  $n$  soluzioni particolari *L.I.* dell'equazione omogenea corrispondente
3. Scrivere il sistema (2.9) e trovarne la soluzione
4. Quadrare tale soluzione e trovare le funzioni di  $x$
5. Applicare la formula (2.10)

### 3 Esercizi col metodo di Lagrange

Ed ora vediamo alcuni esercizi di calcolo dell'integrale generale di equazioni non omogenee col metodo di Lagrange.

$$(3.1) \blacktriangleright xy'' - y' = x^2$$

Come prima operazione liberiamoci del coefficiente della derivata di ordine  $n$ .

E' bene non dimenticare che questa è *un'operazione da eseguire sempre*, se possibile, per non andare incontro ad inutili complicazioni nel calcolo dell'integrale generale.

Dunque possiamo scrivere la (3.1) come

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

L'equazione omogenea corrispondente ha due evidenti integrali particolari

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = \text{cost.} = 1$$

che altrettanto evidentemente sono *L.I.* avendo il wronskiano diverso da zero

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

e quindi formano un sistema fondamentale di soluzioni.

Con esso scriviamo il sistema (2.9)

$$\begin{cases} x^2 g_1' + g_2' = 0 \\ 2x g_1' = x \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione perché il wronskiano dei coefficienti è diverso da zero

$$g_1' = \frac{1}{2}$$

$$g_2' = -\frac{x^2}{2}$$

Quadrando tale soluzione si ottengono le due funzioni di  $x$

$$g_1 = \frac{x}{2}$$

$$g_2 = -\frac{x^3}{6}$$

Applichiamo ora la (1.3) dove

$$z = c_1 x^2 + c_2$$

$$w = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

per ottenere l'integrale generale della (3.1)

$$y = c_1 x^2 + c_2 + \frac{x^3}{3}$$

$$(3.2) \blacktriangleright y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2}{x^2+1} y = (x^2+1)^2$$

L'equazione omogenea corrispondente ha due soluzioni particolari immediatamente evidenti

$$y_1 = x$$

$$y_2 = x^2 - 1$$

Esse sono *L.I.* perché il loro wronskiano è diverso da zero

$$\begin{vmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} \neq 0$$

e quindi formano un sistema fondamentale di soluzioni.

Con esso scriviamo il sistema (2.9)

$$\begin{cases} g_1' \cdot x + g_2' \cdot (x^2 - 1) = 0 \\ g_1' \cdot D(x) + g_2' \cdot D(x^2 - 1) = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1' \cdot x + g_2' \cdot (x^2 - 1) = 0 \\ g_1' + g_2' \cdot 2x = (x^2 + 1)^2 \end{cases}$$

Poiché il wronskiano dei coefficienti come abbiamo appena visto è diverso da zero, il sistema ammette una soluzione

$$g_1' = 1 - x^4$$

$$g_2' = x + x^3$$

Quadrando questa soluzione si ottengono le due funzioni di  $x$

$$g_1 = x - \frac{x^5}{5}$$

$$g_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente è

$$z = c_1(x) + c_2(x^2 - 1)$$

mentre l'integrale particolare dell'equazione non omogenea è

$$w = x \left( x - \frac{x^5}{5} \right) + (x^2 - 1) \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right)$$

Applicando la (1.3) otterremo l'integrale generale della (3.2)

$$y = z + w \Rightarrow c_1(x) + c_2(x^2 - 1) + x^2 - \frac{x^6}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$y = c_1(x) + c_2(x^2 - 1) + \frac{x^6}{20} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$$

$$(3.3) \blacktriangleright x^2 y'' + xy' - y = x^2$$

Liberiamo la derivata seconda del suo coefficiente

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 1$$

Ancora una volta l'occhio allenato ci suggerisce un integrale particolare dell'equazione omogenea corrispondente ben visibile

$$y_1 = x$$

Il secondo lo possiamo calcolare tramite il primo con l'equazione

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-A}}{y_1^2} dx$$

dove

$$A = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x}$$

Si verifica facilmente che i due integrali particolari sono *L.I.*

Scriviamo allora il sistema (2.9)

$$\begin{cases} g_1' \cdot x - g_2' \cdot \frac{1}{2x} = 0 \\ g_1' + g_2' \cdot \frac{1}{2x^2} = 1 \end{cases}$$

che ha la soluzione

$$g_1' = \frac{1}{2}$$

$$g_2' = x^2$$

da cui quadrando avremo

$$g_1 = \frac{x}{2}$$

$$g_2 = \frac{x^3}{3}$$

E allora l'integrale generale della (3.3) sarà, secondo la (2.10):

$$y = \left( c_1 + \frac{x}{2} \right) x - \left( c_2 + \frac{x^3}{3} \right) \frac{1}{2x} \Rightarrow c_1 x - \frac{c_2}{2x} + \frac{x^2}{3}$$

Scrivendo questo risultato in forma canonica

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{3}$$

ci si accorge che ad esso si arriva scegliendo come secondo integrale particolare dell'equazione omogenea

$$y_2 = -\frac{1}{x}$$

una versione semplificata di quello effettivamente utilizzato che, come si verifica facilmente, soddisfa la (3.3) ed è *L.I.* con esso.

$$(3.4) \blacktriangleright xy'' - xy' = 4x^2$$

Scriviamo l'equazione in forma canonica

$$y'' - y' = 4x$$

Due soluzioni particolari dell'equazione omogenea corrispondente sono:

$$y_1 = e^x, y_2 = \text{cost.} = 1$$

Il sistema per il calcolo delle funzioni di  $x$  è:

$$\begin{cases} g_1' e^x + g_2' = 0 \\ g_1' e^x = 4x \end{cases}$$

La soluzione del sistema è:

$$g_1' = \frac{4x}{e^x}, g_2' = -4x$$

da cui quadrando si hanno le funzioni di  $x$

$$g_1 = \frac{-4x - 4}{e^x}$$

$$g_2 = -2x^2$$

Applicando infine la formula (2.10) avremo l'integrale generale della (3.4)

$$y = \left( c_1 - \frac{4x + 4}{e^x} \right) e^x + (c_2 - 2x^2) = c_1 e^x - 4x - 4 + c_2 - 2x^2 = c_1 e^x + c_2 - 2x(x + 2)$$

#### 4 Metodo di Cauchy

Si dimostra che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è dato dalla formula

$$(4.1) \quad y_1 = \int_{x_0}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

nella quale

- $[a, b]$  è un intervallo dove i coefficienti ed il termine noto sono funzioni date di  $x$  continue per tutti i valori di  $x$
- $\xi$  è un punto di tale intervallo nel quale valgono le condizioni iniziali  $y(\xi) = 0, y'(\xi), \dots, y^{(n-2)}(\xi) = 0, y^{(n-1)}(\xi) = 1$
- $K(x, \xi)$  è un integrale particolare dell'equazione omogenea corrispondente, funzione di  $x$  e di  $\xi$ , detto *nucleo risolvente*
- $f(\xi)$  è il termine noto in  $\xi$

Il lavoro da svolgere per ricavare l'integrale generale di un'equazione non omogenea col metodo di Cauchy è quindi tutto nel *calcolo del nucleo risolvente*, dopo di che si potrà applicare la (1.3).

Si dimostra che il nucleo risolvente è dato dal rapporto tra due determinanti

$$(4.2) \quad K(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix}}$$

Come si vede sia a numeratore che a denominatore c'è il wronskiano dell'equazione omogenea corrispondente calcolato in  $\xi$ , ma in quello a numeratore l'ultima riga è stata sostituita col sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea.

Esempio.

Calcoliamo col metodo di Cauchy l'integrale particolare dell'equazione (3.4) e quindi il suo integrale generale:

$$(4.3) \quad xy'' - xy' = 4x^2$$

Liberiamo la derivata di ordine massimo del suo coefficiente

$$y'' - y' = 4x$$

Il sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente è

$$y_1 = e^x, y_2 = 1$$

che ha quindi come integrale generale

$$z = c_1 e^x + c_2$$

Calcoliamo il nucleo risolvente

$$K = \frac{\begin{vmatrix} e^\xi & 1 \\ e^x & 1 \\ e^\xi & 1 \\ e^\xi & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^\xi & 1 \\ e^\xi & 0 \end{vmatrix}} = \frac{e^x}{e^\xi} - 1$$

e quindi calcoliamo l'integrale particolare dell'equazione non omogenea

$$w = \int_0^x \left( \frac{e^x}{e^\xi} \cdot 4\xi \right) d\xi - \int_0^x (4\xi) d\xi = -4x - 4 - 2x^2$$

Applicando ora la (1.3) si ottiene l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$y = z + w = c_1 e^x + c_2 - 4 - 4x - 2x^2$$

che scritto in forma canonica

$$y = c_1 e^x + c_2 - 4x - 2x^2$$

è identico a quello trovato col metodo di Lagrange come ci aspettavamo.

Portiamo ancora un esempio ricalcolando l'integrale generale della (3.3).

$$(4.4) \blacktriangleright x^2 y'' + xy' - y = x^2$$

Liberiamo la derivata seconda del suo coefficiente

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 1$$

Il sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente è

$$y_1 = x, y_2 = -\frac{1}{x}$$

e il suo integrale generale è

$$z = c_1 x - \frac{c_2}{x}$$

Calcoliamo il nucleo risolvete

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \xi & -\frac{1}{\xi} \\ x & -\frac{1}{x} \\ \xi & -\frac{1}{\xi} \\ 1 & \frac{1}{\xi^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi & -\frac{1}{\xi} \\ \xi & -\frac{1}{\xi} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2} - \frac{\xi^2}{2x}$$

e quindi calcoliamo l'integrale particolare dell'equazione non omogenea

$$w = \int_0^x \frac{x}{2} d\xi - \int_0^x \frac{\xi^2}{2x} d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{3}$$

Applicando ora la (1.3) si ottiene l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$$y = z + w = c_1 x - \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{3}$$

che scritto in forma canonica

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{3}$$

è esattamente uguale a quello trovato col metodo di Lagrange come ci aspettavamo.

Ricapitolando, il lavoro da fare per integrare un'equazione lineare non omogenea col metodo di Cauchy è:

1. Eliminare, se presente e se possibile, il coefficiente della derivata di ordine massimo
2. Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente
3. Calcolare il nucleo risolvete con la (4.2)
4. Calcolare l'integrale particolare dell'equazione non omogenea con la (4.1)
5. Applicare la formula (2.10)

### 5 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti col metodo di Cauchy

Fin'ora abbiamo portato esempi di equazioni non omogenee del secondo ordine delle quali il calcolo dell'integrale particolare è facile in quanto si ha a che fare con sistemi di due equazioni in due incognite (Lagrange) e con determinanti del secondo ordine (Cauchy) che producono funzioni abbastanza semplici da integrare. Per equazioni di ordine  $n > 2$  le cose ovviamente non stanno più in questi termini e i calcoli si complicano enormemente al crescere di  $n$ .

Ma se si ha a che fare con equazioni non omogenee a coefficienti costanti si può utilizzare il metodo di Cauchy adattato alla bisogna che semplifica enormemente il calcolo del nucleo risolvete.

Si dimostra che se l'equazione è a coefficienti costanti il nucleo risolvete è dato da

$$(5.1) \quad K(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1(x-\xi) & \dots & y_n(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix}}$$

Mostriamo subito un esempio.

$$(5.2) \quad y^{(3)} - 3y^{(2)} + 4y^{(1)} - 2y = x$$

Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente mediante la sua equazione caratteristica

$$k^3 - 3k^2 + 4k - 2 = 0$$

che ha soluzioni

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1 + i, \quad k_3 = 1 - i$$

Gli integrali particolari saranno dunque del genere  $k_n = xe^{kx}$

$$y_1 = e^{1x} = 1$$

$$y_2 = e^{(1+i)x}$$

$$y_3 = e^{(1-i)x}$$

*Ricordate che...*  
per la formula di Eulero è  
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Due di queste soluzioni sono funzioni complesse di argomento reale e quindi se esse soddisfano l'equazione omogenea anche le due soluzioni reali seguenti la soddisferanno

$$y_2 = e^x \cos x$$

$$y_3 = e^x \sin x$$

Ora possiamo calcolare il nucleo risolvete in 0 sviluppando due determinanti molto semplici

$$K(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{x-\xi} & e^{x-\xi} \cos(x-\xi) & e^{x-\xi} \sin(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - e^{x-\xi} \cos(x-\xi) + e^{x-\xi} + 1 - 1}{0 - 0 + 1 + 1 - 1} = e^{x-\xi} (1 - \cos(x-\xi))$$

Pertanto l'integrale generale della (5.2) sarà

$$y = c_1 + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + \int_0^x e^{x-\xi} \xi d\xi - \int_0^x e^{x-\xi} \cos(x-\xi) \xi d\xi$$

$$y = c_1 + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + (e^x - x - 1) - \frac{1}{2} (e^x \sin x - x)$$

## 6 Dimostrazioni del metodo di Cauchy

Per rendere ragione del metodo di Cauchy dobbiamo dimostrare la (4.1), la (4.2) e la (5.1).

I lettori che avessero un appuntamento cui non possono mancare possono tranquillamente omettere la lettura di queste dimostrazioni che non aggiungerebbero nulla alla loro cultura matematica.

● Dimostriamo dapprima la (4.2).

Cerchiamo un integrale dell'equazione omogenea corrispondente

$$y(x) = c_1 y_1(x), \dots, c_n y_n(x)$$

per il quale valgano le condizioni iniziali

$$y(\xi) = 0, y'(\xi) = 0, \dots, y^{(n-2)}(\xi) = 0, y^{(n-1)}(\xi) = 1$$

Tale integrale, che chiamiamo  $K(x, \xi)$ , esiste ed è funzione sia di  $x$  che di  $\xi$ .

Quindi volendo che sia

$$y(x) = K(x, \xi)$$

dovrà esistere una soluzione  $c_1, \dots, c_n$  al sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) + \dots + c_n y_n(\xi) = 0 \\ c_1 y_1'(\xi) + \dots + c_n y_n'(\xi) = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = 1 \\ c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = y(x) \end{cases}$$

Ma questo è un sistema di  $n$  incognite ed  $n+1$  equazioni e pertanto il determinante della sua matrice completa deve essere nullo

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) & 1 \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \end{vmatrix} = 0$$

Ora sviluppiamo col primo teorema di Laplace questo determinante secondo l'ultima colonna.

Si vede immediatamente che i primi  $n-1$  prodotti degli  $1, \dots, n-1$  elementi dell'ultima colonna per i rispettivi minori complementari sono nulli e pertanto restano diversi da zero solo gli ultimi due prodotti. Considerato che l'ultimo minore complementare è il wronskiano in  $\xi$  si ha

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) & 1 \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \end{vmatrix} = 0 + \dots + 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix} + y(x) \cdot W(\xi) = 0$$

Considerato che abbiamo posto  $y(x) = K(x, \xi)$ , operando questa sostituzione ed esplicitando  $K(x, \xi)$  abbiamo dimostrato la (4.2).

● Dimostriamo ora la (4.1).

La dimostrazione consiste nel far vedere che comunque si scelga  $x_0$  nell'intervallo  $[a, b]$  un integrale particolare calcolato con la (4.1) soddisfa la (1.1).

Avendo bisogno delle  $y_1', \dots, y_1^{(n)}$  dovremo derivare  $n$  volte la (4.1), il che è un problema aggiuntivo in quanto sotto integrale abbiamo una funzione di due variabili  $x, \xi$ . Siamo quindi costretti a metter mano al *teorema di derivazione sotto il segno di integrale*, citandolo in formula senza impantancarci nella sua dimostrazione che uscirebbe dal seminato di questo lavoro.

*Teorema di derivazione sotto il segno d'integrale.*

$$D \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = f[x, b(x)] b'(x) - f[x, a(x)] a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy$$

Applicando questa formula alla (4.1) otteniamo

$$y_1' = D \int_{x_0}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi = K(x, x) f(x) - 0 + \int_{x_0}^x K'(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Ora, tenendo presente che  $K(x, \xi)$  deve soddisfare le condizioni iniziali

$$(6.1) \quad K(\xi, \xi) = 0, K'(\xi, \xi) = 0, \dots, K^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, K^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1$$

si avrà

$$y_1' = 0 + \int_{x_0}^x K'(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Iterando il processo di derivazione e tenendo sempre d'occhio le condizioni (6.1) si avrà

$$y_1'' = K'(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K''(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0 + \int_{x_0}^x K''(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

...

$$y_1^{(n-1)} = K^{(n-2)}(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$y_1^{(n)} = K^{(n-1)}(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi = f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Avendo a disposizione tutte le derivate dell'integrale particolare possiamo ora provare a vedere se esso soddisfa la (1.1)

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1 = f(x) + \int_{x_0}^x [K^{(n)}(x, \xi) + a_1 K^{(n-1)}(x, \xi) + \dots + a_n K(x, \xi)] f(\xi) d\xi$$

ma l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente è proprio

$$z = K^{(n)}(x, \xi) + a_1 K^{(n-1)}(x, \xi) + \dots + a_n K(x, \xi)$$

e poiché esso vale zero si ha esattamente

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1 = f(x) \text{ c.d.d.}$$

☺ La dimostrazione della (5.1) è banale.

Sostituiamo nell'equazione omogenea corrispondente la variabile  $x$  con la variabile  $u = x - \xi$ .

Tale sostituzione è possibile e plausibile perché per ipotesi i coefficienti  $k_1, \dots, k_n$  sono costanti.

Per ipotesi l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente

$$y^{(n)}(x) + k_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + k_n y(x) = 0$$

soddisfa le condizioni

$$y(\xi) = 0, y'(\xi) = 0, \dots, y^{(n-2)}(\xi) = 0, y^{(n-1)}(\xi) = 1$$

e quindi anche l'integrale

$$y^{(n)}(u) + k_1 y^{(n-1)}(u) + \dots + k_n y(u) = 0$$

dovrà soddisfare le stesse condizioni.

Ma nel punto  $x = \xi$   $u$  vale evidentemente zero e pertanto le condizioni da soddisfare sono

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{(n-2)}(0) = 0, y^{(n-1)}(0) = 1$$

ed allora possiamo scrivere il nucleo risolvete nel modo seguente

$$K(u) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1(u) & \dots & y_n(u) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix}}$$

Ma poiché è  $u = x - \xi$  operando questa sostituzione si ha la (5.1).

Fine della sesta parte ■  
 Leonardo Calconi  
[leo@4dmatrix.it](mailto:leo@4dmatrix.it)

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo:  
[www.4dmatrix.it/math](http://www.4dmatrix.it/math)