

# SUCCESSIONE DI FIBONACCI

Un utile complemento al documento "Potenze e radici in C"

di Leonardo Calconi

Pubblicato il 09.03.07

1 Successione di Fibonacci

2 Radici quinte dell'unità e numero  $\Phi$  pag. 5

3 Polinomi di Fibonacci pag. 6

4 Numeri titanici pag. 8

Prima di stampare l'intero documento andate a pagina 8; potrebbe non interessarvi il contenuto di quella pagina e delle successive.

## 1 SUCCESSIONE DI FIBONACCI

La successione di Fibonacci è definita per ricorrenza da

$$\blacktriangleright F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

con condizioni iniziali

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

La successione diverge chiaramente a  $+\infty$  in quanto è strettamente crescente e a termini positivi.

Infatti per  $n \rightarrow \infty$  si ha  $F = 2F$  e quindi non potendo essere  $F = 0$  sarà  $F = +\infty$ .

Ora prendiamo in considerazione la successione

$$C_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

definita sempre per ricorrenza. Per il criterio del rapporto poichè  $F_n$  non tende a zero  $C_n$  non può tendere ad un valore  $< 1$ , quindi dovrà convergere ad un numero  $> 1$  che dimostreremo essere  $\phi$ , ovvero che

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\phi}}$$

Vediamo come procedere, ed oltre a ricavare  $\phi$  calcoliamo anche  $F_n$ .

Definiamo per ricorrenza la successione sotto la forma equivalente

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Dividendo ambo i membri per  $F_{n+1}$  otteniamo la relazione di ricorrenza

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

Ora, per valori di  $F_n$  sempre più grandi possiamo considerare

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

e quindi porre

$$C_{n+1} = 1 + \frac{1}{C_n}$$

Ancora, sfruttando la proprietà delle successioni definite per ricorrenza sull'esistenza del limite possiamo supporre che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n+1} = \phi$$

e quindi porre

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

ovvero

$$\blacktriangleright x^2 - x - 1 = 0$$

detta *equazione caratteristica* che ha come soluzioni

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dove la soluzione negativa si scarta (ma non si getta via...) perchè  $F_n$  è sempre positivo.

E' quindi dimostrato che il valore del limite è il numero irrazionale  $\phi$  detto *Sezione Aurea*

$$\blacktriangleright \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576\dots$$

ed che il suo inverso è

$$\blacktriangleright \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = 0,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576\dots$$

e che quindi

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

Ma noi abbiamo definito  $C_n$  per ricorrenza ed il limite è stato calcolato nell'ipotesi che esso esista;

ora dobbiamo dimostrare che la successione  $C_n$  ammette effettivamente tale limite, il che ci mette di fronte alla difficoltà che essa pur essendo strettamente crescente non è monotona in quanto i suoi valori oscillano attorno al limite  $\phi$ , il che si verifica direttamente sui primi termini della successione

$F_n$ : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,...

e si dimostra facilmente considerando che se

$$C_n < \phi$$

allora è

$$C_{n+1} = 1 + \frac{1}{C_n} > 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

e poichè è

$$C_1 = 1 < \phi$$

abbiamo che

$C_{2n+1} < \phi$ : i termini di ordine dispari sono minori di  $\phi$

$C_{2n} > \phi$ : i termini di ordine pari sono maggiori di  $\phi$

Ora è sufficiente dimostrare che:

1. la successione  $C_{2n+1}$  è strettamente crescente
2. la successione  $C_{2n}$  è strettamente decrescente

3. ambedue convergono a  $\phi$

per concludere che  $C_n$  ammette limite e che tale limite è esattamente  $\phi$ .

Osservando che siamo di fronte alla frazione continua

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

riscriviamo la relazione di ricorrenza già vista

$$C_{n+2} = 1 + \frac{1}{C_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{C_n}} = 1 + \frac{C_n}{1 + C_n}$$

Considerate la questione anche dal punto di vista di un radicale continuo del tipo

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

da cui

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Prendiamo in considerazione  $C_{2n+1}$  e dimostriamo che è strettamente crescente.

Perchè sia  $C_n > C_{n+2}$  deve essere  $1 + \frac{C_n}{1 + C_n} > C_n$  ovvero  $C_n^2 - C_n - 1 < 0$ .

Come abbiamo visto l'equazione caratteristica ha come soluzioni  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , ed essendo sempre

$C_n > 0$  si ha  $C_n < \phi$ , il che è vero solo per  $C_{2n+1}$ .

Analogamente si dimostra che  $C_{2n}$  è strettamente decrescente e che  $C_n > \phi$  è vero solo per  $C_{2n}$ .

Avendo dimostrato i punti 1), 2), 3) abbiamo dimostrato che  $C_n$  ammette limite e che tale limite è esattamente  $\phi$ .

Ora non rimane che affrontare l'ultima questione: trovare una formula chiusa che permetta di calcolare l'elemento generico  $F_n$  della successione di Fibonacci.

Osserviamo immediatamente che le due soluzioni dell'equazione caratteristica non soddisfano le condizioni iniziali  $F_0 = 0, F_1 = 1$  della relazione di ricorrenza  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  che definisce la successione di Fibonacci.

Dobbiamo quindi prescindere dalle condizioni iniziali ed imporre che la soluzione cercata sia una combinazione lineare del tipo

$$F_n = ax^n + by^n$$

con  $x$  e  $y$  soluzioni dell'equazione caratteristica.

Avrete immediatamente capito che si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax^0 + by^0 = 0 \\ ax^1 + by^1 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Sostituiamo nella combinazione lineare e otteniamo la formula di Binet

$$\blacktriangleright F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

ovvero l'ennesimo termine della successione di Fibonacci.

Siamo alla fine del lavoro.

Riprendiamo la soluzione negativa dell'equazione caratteristica a suo tempo scartata e completiamo la nostra conoscenza di  $\phi$  :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \quad -\phi = \frac{2}{1-\sqrt{5}}, \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La domanda è: quanto vale un numero di Fibonacci per un certo  $n$  ?

- Per  $n = 100$  abbiamo 354 224 848 179 261 915 075 un numero di 21 cifre
- Per  $n = 1000$  abbiamo 434 665 576 869 374 564 356...un numero di 209 cifre
- Per  $n = 10000$  abbiamo 336 447 648 764 317 832 666...un numero di 2090 cifre

Altra domanda: possiamo approssimare la formula di Binet ?

Considerando che  $\left( -\frac{1}{\phi} \right)^n$  assume alternativamente valori negativi e positivi sempre più piccoli al

crescere dell'esponente  $n$ , possiamo affermare che un  $F_n$  sufficientemente grande è

sufficientemente vicino a  $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ .

Ma *quanto* sufficientemente grande e sufficientemente vicino e per quale  $n$ ?

Mettiamo mano alla calcolatrice scientifica.

Già con  $n = 19$ ,  $n = 20$  e  $n = 21$  abbiamo valori molto vicini:

$$F_{19} = 4181$$

$$\frac{\phi^{19}}{\sqrt{5}} = 4180,999952 < F_{19}, \text{ indice dispari, approssimazione per difetto}$$

$$F_{20} = 6765$$

$$\frac{\phi^{20}}{\sqrt{5}} = 6765,000029 > F_{20}, \text{ indice pari, approssimazione per eccesso}$$

$$F_{21} = 10946$$

$$\frac{\phi^{21}}{\sqrt{5}} = 10945,99998 < F_{21}, \text{ indice dispari, approssimazione per difetto}$$

e per quanto riguarda il rapporto tra questi numeri, ovvero  $\phi$ , abbiamo:

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = 1.620425735 > \phi, \text{ indice pari, approssimazione per eccesso}$$

$$\frac{F_{21}}{F_{20}} = 1.615645756 < \phi, \text{ indice dispari, approssimazione per difetto.} \blacksquare$$

## 2 RADICI QUINTE DELL'UNITA' E NUMERO $\Phi$

Il punto di partenza sono le radici quinte dell'unità.

In questo lavoro trattiamo solo del loro significato geometrico in funzione del numero  $\Phi$ .

Chi è interessato agli aspetti algebrici delle radici ennesime dell'unità troverà del materiale nel documento [http://www.4dmatrix.it/math/c\\_exp.pdf](http://www.4dmatrix.it/math/c_exp.pdf).

Come è noto, le radici quinte dell'unità sono date dalle soluzioni complesse dell'equazione ciclotomica

$$x^5 - 1 = 0$$

soluzioni che valgono

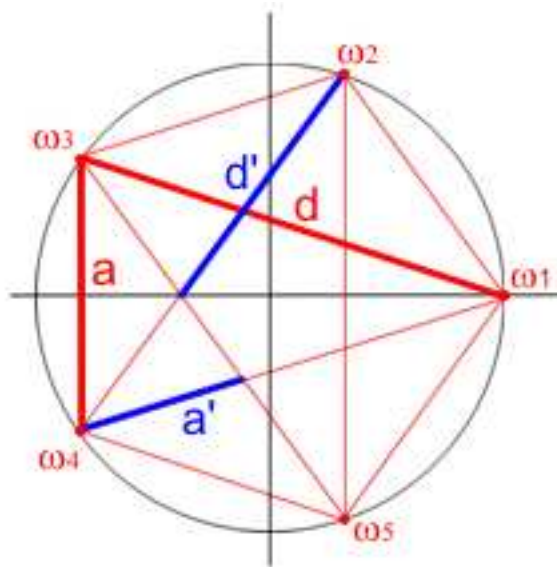
$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2, \omega_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\omega_3, \omega_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Tali soluzioni stanno sulla circonferenza unitaria uniformemente distanziate di  $2\pi/5$  e quindi sui vertici del pentagono regolare iscritto.

Consideriamo il triangolo  $\omega_1\omega_3\omega_4$  e il valore assoluto

$\omega_2^c, \omega_3^c, \omega_4^c, \omega_5^c$  dei coefficienti della parte immaginaria delle radici quinte diverse dall'unità.



Il lato maggiore vale chiaramente  $d = \omega_2^c + \omega_5^c \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} =$  diagonale del pentagono,

ed il lato minore vale altrettanto chiaramente  $a = \omega_3^c + \omega_4^c \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} =$  lato del pentagono.

Adesso se dividiamo  $d$  per  $a$  otteniamo, come ci aspettiamo, il numero  $\Phi$ :

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988... = \phi$$

Abbiamo così provato che il numero  $\Phi$  è dato:

- ✓ dal rapporto tra diagonale e lato del pentagono regolare inscritto
- ✓ dal rapporto tra i coefficienti della parte immaginaria delle radici quinte dell'unità
- ✓ dalla sezione aurea della diagonale del pentagono regolare inscritto

Per la verità la terza occorrenza non l'abbiamo provata, ma si rimedia subito.

Infatti

$$a' = d - d', d' = a \Rightarrow a' = d - a$$

$$\frac{d'}{a'} = \frac{a}{d-a} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

■

### 3 POLINOMI DI FIBONACCI

Si definiscono per ricorrenza i polinomi di Fibonacci

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$$

che sono espressi anche dalla formula esplicita

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}$$

dove  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  è una funzione intera e  $\binom{n-k-1}{k}$  un coefficiente binominiale

Per costruire i polinomi di Fibonacci si adopera efficacemente il triangolo di Pascal entro la cui struttura si inseriscono i coefficienti dei polinomi:

$F_1(x) = 1$	
$F_2(x) = x$	1
$F_3(x) = x^2 + 1$	1 1
$F_4(x) = x^3 + 2x$	1 2 1
$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$	1 3 3 1
$F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$	1 4 6 4 1
$F_7(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + x$	1 5 10 10 5 1
$F_8(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$	1 6 15 20 15 6 1
$F_9(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + x$	1 7 21 35 35 21 7 1
$F_{10}(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$	1 8 25 56 70 56 28 8 1

Raccogliamo queste evidenze:

- i coefficienti dei polinomi di Fibonacci si ricavano dal triangolo di Pascal
- le somme dei coefficienti sono numeri di Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.
- i numeri di Fibonacci sono polinomi di Fibonacci con  $x = 1$
- i numeri di Fibonacci si ricavano dal triangolo di Pascal (di Tartaglia...)

Possiamo deformare il triangolo di Pascal tenendo ferma la base e facendo slittare il vertice verso sinistra, ovvero facendo slittare le righe verso destra di un posto, per ottenere una tabella dei numeri di Fibonacci e dei coefficienti dei polinomi di Fibonacci *per colonna*. Notare come la lettura sia doppia in quanto essi sono anche disposti a “L” rovesciata su colonne affiancate:



$$\omega_3 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$

$$\omega_4 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\phi}$$

Chi è interessato ai polinomi ciclotomici, troverà del materiale nel documento [http://www.4dmatrix.it/math/c\\_exp.pdf](http://www.4dmatrix.it/math/c_exp.pdf) ■

#### 4 NUMERI TITANICI

Ecco i primi cento numeri della successione di Fibonacci calcolati in un attimo con Derive®:

VECTOR(FIBONACCI(n), n, 1, 100)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, **4181, 6765, 10946**, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173, 86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920, 2504730781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288, 44945570212853, 72723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129, 498454011879264, 806515533049393, 1304969544928657, 2111485077978050, 3416454622906707, 5527939700884757, 8944394323791464, 14472334024676221, 23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591, 99194853094755497, 160500643816367088, 259695496911122585, 420196140727489673, 679891637638612258, 1100087778366101931, 1779979416004714189, 2880067194370816120, 4660046610375530309, 7540113804746346429, 12200160415121876738, 19740274219868223167, 31940434634990099905, 51680708854858323072, 83621143489848422977, 135301852344706746049, 218922995834555169026, 354224848179261915075.

In binario...

1, 1, 10, 11, 101, 1000, 1101, 10101, 100010, 110111, 1011001, 10010000, 11101001, 101111001, 1001100010, 1111011011, 11000111101, 101000011000, 1000001010101, 1101001101101, 10101011000010, 100010100101111, 110111111110001, 1011010100100000, 10010010100010001, 11101101000110001, 101111111101000010, 1001101100101110011, 1111101100010110101, 11001011001000101000, 101001000101011011101, 1000010011110100000101, 1101011100011111100010, 10101110000010011100111, 100011001100110011001001, 111000111101000110110000, 1011100001001111001111001, 10010101000111000000101001, 11110001010000111010100010, 11000011001011111011001011, 1001110111101000110101101101, 1111111110000000110000111000, 11001110101101001100110100101, 101001110011101010010111011101, 1000011101001010011111110000010, 11011010111001111100101011111, 10110001000110010010010011100001, 100011110100011010000101001000000, 111001111101001100010111100100001, 1011101110001100110011100101100001, 10010111101110110010110100010000010, 11110101100000011001010000111100011, 110001101001111001100000101001100101,

101000001010111100101010110001001000, 1000000111111110110001011011010101101,  
 11010010010101110010110110001011110101, 101010100010101101001000001100110100010,  
 100010011010101101101111011110010010111,  
 1101111011000001000100111001011000111001,  
 10110100001101100100000110001001011010000,  
 100100011100101101100101101010100100001001,  
 11101011110011010000110011011101111011001,  
 1011111011011000111101100000110010011100010,  
 10011010011001100001110010100010000010111011,  
 11111001110100101001011110101000010110011101,  
 110010100001110001011010001001010011001011000,  
 101000111000001011010010111111001010111110101,  
 10000100010010001000000000000111101001001001101,  
 11010110000010011110100110000101111111001000010,  
 101011010010100100110100110001101101000010001111,  
 1000110000010111000101001100010011100111011010001,  
 1110001010101011101011110010100001001111101100000,  
 10110111011000010110000111110110100110111000110001,  
 100101000101101110011100110001010110000110110010001,  
 111100000000110001001101110000001010111101111000010,  
 1100001000110011111101010100001100001000100101010011,  
 10011101000111010000111000010001101100000010100010101,  
 11111110001101110000100010110011001101000111001101000,  
 11001101101010100000101101100010011100100100110111101,  
 1010011001100010110001111101111000000110010000111100101,  
 10000110100110111110011011000111100111111011010101100010,  
 1101100111001101010010101010110110101000101101011101000111,  
 101100000011010010011000101111110010000101000110010101001,  
 1000111010001101100111110000110100111001010110001111110000,  
 1110011010100111111010110110110011001001111111000010011001,  
 10111010100110101100010100111101000000011010101010010001001,  
 100101101111011101011101011110011011001101010100010100100010,  
 111101000100010011000000000110000011010000101001100110101011,  
 1100010110011110000011101100100011110011101111101111011001101,  
 100111111111000000011011101101010100001101110100111100001111000,  
 100000010101011110011111011001111000000001100100101011101000101,  
 110100010100011110111011000111001100001111011001100111110111101,  
 1010100101001111101011010100001000100010000111110010011100000010,  
 10001000111110011100010101101000010000100000010111111011010111111,  
 11011101101000011001110000001001010100110001010110001110111000001,  
 101100110100110110110000101110001100101010001101110001010010000000,  
 1001000100001111001111110101111010111010000011000100011001001000001,  
 1110101010110110000101111011101100011111010100110010100011011000001,  
 10111101111000101010101110001100111011001010111110110111100100000010,  
 10011001100111101101101110110101001111100010110010100101111111000011

Ed ecco phi con 10.000 decimali calcolato con lo stesso programma:  
 (80 decimali per riga)

**1.**

61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526046281890244  
97072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333  
89086595939582905638322661319928290267880675208766892501711696207032221043216269  
54862629631361443814975870122034080588795445474924618569536486444924104432077134  
49470495658467885098743394422125448770664780915884607499887124007652170575179788  
34166256249407589069704000281210427621771117778053153171410117046665991466979873  
17613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347845878228  
91109762500302696156170025046433824377648610283831268330372429267526311653392473  
16711121158818638513316203840052221657912866752946549068113171599343235973494985  
09040947621322298101726107059611645629909816290555208524790352406020172799747175  
34277759277862561943208275051312181562855122248093947123414517022373580577278616  
00868838295230459264787801788992199027077690389532196819861514378031499741106926  
08867429622675756052317277752035361393621076738937645560606059216589466759551900  
4005590895022953094231248235521221241544400647034056573479766397239494994658457  
88730396230903750339938562102423690251386804145779956981224457471780341731264532  
20416397232134044449487302315417676893752103068737880344170093954409627955898678  
72320951242689355730970450959568440175551988192180206405290551893494759260073485  
22821010881946445442223188913192946896220023014437702699230078030852611807545192  
88770502109684249362713592518760777884665836150238913493333122310533923213624319  
26372891067050339928226526355620902979864247275977256550861548754357482647181414  
51270006023890162077732244994353088999095016803281121943204819643876758633147985  
71911397815397807476150772211750826945863932045652098969855567814106968372884058  
74610337810544439094368358358138113116899385557697548414914453415091295407005019  
47754861630754226417293946803673198058618339183285991303960720144559504497792120  
76124785645916160837059498786006970189409886400764436170933417270919143365013715  
76601148038143062623805143211734815100559013456101180079050638142152709308588092  
87570345050780814545881990633612982798141174533927312080928972792221329806429468  
78242748740174505540677875708323731097591511776297844328474790817651809778726841  
61176325038612112914368343767023503711163307258698832587103363222381098090121101  
98991768414917512331340152733843837234500934786049792945991582201258104598230925  
52872124137043614910205471855496118087642657651106054588147560443178479858453973  
12863016254487611485202170644041116607669505977578325703951108782308271064789390  
21115691039276838453863333215658296597731034360323225457436372041244064088826737  
58433953679593123221343732099574988946995656473600729599983912881031974263125179  
71414320123112795518947781726914158911779919564812558001845506563295285985910009  
08621802977563789259991649946428193022293552346674759326951654214021091363018194  
72270789012208728736170734864999815625547281137347987165695274890081443840532748  
37813782466917444229634914708157007352545707089772675469343822619546861533120953  
35792380146092735102101191902183606750973089575289577468142295433943854931553396  
30380729169175846101460995055064803679304147236572039860073550760902317312501613  
20484358364817704848181099160244252327167219018933459637860878752870173935930301  
33590112371023917126590470263494028307668767436386513271062803231740693173344823  
43564531850581353108549733350759966778712449058363675413289086240632456395357212  
52426117027802865604323494283730172557440583727826799603173936401328762770124367  
98311446436947670531272492410471670013824783128656506493434180390041017805339505  
87724586655755229391582397084177298337282311525692609299594224000056062667867435  
79239724540848176519734362652689448885527202747787473359835367277614075917120513  
26934483752991649980936024617844267572776790019191907038052204612324823913261043  
27191684512306023627893545432461769975753689041763650254785138246314658336383376  
02357789926729886321618583959036399818384582764491245980937043055559613797343261  
34830494949686810895356963482817812886253646084203394653819441945714266682371839

49183237090857485026656803989744066210536030640026081711266599541993687316094572  
28881092077882277203636684481532561728411769097926666552238468831137185299192163  
19052015686312228207155998764684235520592853717578076560503677313097519122397388  
72246825805715974457404842987807352215984266766257807706201943040054255015831250  
30175340941171910192989038447250332988024501436796844169479595453045910313811621  
87045679978663661746059570003445970113525181346006565535203478881174149941274826  
41521355677639403907103870881823380680335003804680017480822059109684420264464021  
87705340100318028816644153091393948156403192822785482414510503188825189970074862  
28794215589574282021665706218809057808805032467699129728721038707369740643566745  
89202586565739785608595665341070359978320446336346485489497663885351045527298242  
29069984885369682804645974576265143435905093832124374333387051665714900590710567  
02488798580437181512610044038148804072524406164290224782271527241120850657888387  
12493635106806365166743222327767755797399270376231914704732395512060705503992088  
44260370879084333426183841359707816482955371432196118950379771463000755597537957  
03552271449319132172556440128309180504500899218705121186069335731538959350790300  
73672702331416532042340155374144268715405511647961143323024854404094069114561398  
73026039518281680344825254326738575900560432024537271929124864581333441698529939  
13574786989579864394980230471169671573622839120181273129165899527599192203183723  
56827279385637331265479985912463275030060592567454979435088119295056854932593553  
18729141801136412187470752628106869830135760524719445593219553596104528303148839  
11769301196585834314424894898565584250834109429502771975833522442912573649380754  
17113739243760143506829878493271299751228688196049835775158771780410697131966753  
4771947922636519016339771284739079336111914089983056033610609871717830554354035  
60895292908184641437139294378135604820389479125745077075575103002420726629001809  
04229342494259060666141332287226980690145994511995478016399151412612525728280664  
33126165746938819510644216738718000110042184830258091654338374923641183888564685  
14315006373190429514814694243146089525470720374055669130692209908048194529751106  
50464281054177552590951871318883591476599604131796020941530858553323877253802327  
27632977372143127968216716234421183201802881412747443168847218459392781435474099  
99907223320305926297661123832798331698825393126200650370288447828666940447307947  
10476125586583752986236250999823233597155072338383324408152577819336426263043302  
65895817080045127887311593558774721725649470005163667257715392098409503274511215  
36873009121996295227659131637093968607271342692623154753304379933165811073696431  
42171979434056391551210810813626268885697480680601169189417502722987415869917914  
53499462444194012197858601373660828690722365147713912687420966513787562059185432  
88883417429209015631332831935756220897137656309785015631549824564458654247929357  
22828750608481453351352181729587932991171003247622205219464510536245051298843087  
13444395072442673514628617991832336459836963763272257569159723954383052086647474  
23815110792734948369523964792689936983249179995027895000604596613134633630249499  
51480805329017902975182515875049007435187983511836032722772601717404535571658855  
57829729106195819351710554825793070910057635869901929721799516873117556314448564  
81002200142545405542927345883711602099479457208237804368718944805636891825802444  
99631878342027491015335791072733625328906933474123802222011626277119308544850295  
41913200400999865566651775664095365619789781838045103035651013158945890287186108  
69058939471368014845700183664956472032943343742989464274125514359058434840919548  
70152361403173913903616440198455051049121169792001201999605069949664030350863692  
90394100701945053201623487276323273244943963048089055425137972331475185207091025  
06368598167953048181007394245317002388047598343234504142584314063612721096022824  
23378228090279765960777108493915174887316877713522390091171173509186006546200990  
24975852779254278165970383495058010626155333691093784659771052975022317307412177  
83441894118459658610298018778742744563866966127724503845860526415103040898257777

54474115332076407588167751497553804711629667771005876646159549677692705496239398  
57092550702740699781408431249653630718665337180605874224259816530705257383454157  
70542921629981149175086113117657731720956156564786954744892713206080635457794624  
14531066983742113798168963823533304477883169339728728918103664083269856988254438  
51667586228993069643468489751484087903964760420361020602171739447026348763365439  
31952290773836167389811781242483655781050341694515636260430036657431084766548777  
80128577923645418522447236171374229255841593135612866371670328072171553392646325  
73067306391085410886808574283858828060230334140855039097353872613451196292641599  
52127893113544314601527309025538271043259662267439037455636122861390783194335705  
90038148700898661315398195857442330441970856696722293142730741384882788975588860  
79973870447020316683485694199096548029824931981765792682985562972301068277723516  
27407838074318778273182119196952800516087915721288263379682312725628700015001829  
29757729993579094919640763442861575713544427898383040454702710194580042582021202  
34458063034503365814721854920367998997293535391968121331951653797453991114942444  
51830338588412904018178188213760066592849413677543174516054093871103687152116404  
05821934471204482775960541694864539878326269548013915019038995931306703186616706  
63719640256928671388714663118919268568269199527645799771827875946096161721886810  
94546515788691224106098141972686192554787899263153594729228250805425169068140107  
81796021885330762305563816316401922454503257656739259976517530801427160714308718  
86285983603746505713420467008343275423027704779331118366690323288530687387990713  
59007403049074598895136476876086784432382482189306175703195638032308197193635672  
74196438726258706154330729637038127515170406005057594882723856345156390526577104  
26459476040556950959840888903762079956638801786185591594411172509231327977113803

In binario con 10.000 bits...

## 1.

10011110001101110111100110111001011111110100101001111100000101011111001110011100  
11000000011000000101110011101101110010000011010000010000100000100010011101101011  
11110011101000100111001001010001111110000110110001101010000100011101000011000001  
10001110100101010010011101100111111100001011000101010011110100100111101101111111  
0000001101000111000001000101101101011011111100011000001001111111000000110001000  
0110111100001001001010000100000000110000000001011000001110101100100101110100100  
00001111001100110101111000110110111100000110101011010111101011101001011100010111  
100001110111111010000101100000111001110101101110111111110111101011110111000110  
01100100110100110010010111010001110001010011011100010110100000101100101011011101  
000011001100110011111101111111110111011110000101100010011011100011001110111000  
1101000001001011010000110011000110111011111011100111100011110010000110110010100  
11110111100111010100011100011100010010101011001111101101001111011000001010100101  
1111111011000101000001110111000001011100100101011100110111001011110011100111010  
10011011100100011111001110101010010011011011001010000111101011100100010011110011  
00110010111010010010001110100111001111001011100100010110010010001110010000101000  
1110100101110101101000110111100000011101011000000011011010010011101100001100111  
01001111101000010101000010000100000110011110000011101010101001000000001110001011  
00110101001011011001101110101101001100001111010001001000010110110111000110101000  
11101111011001000100010100101010000011011101010000001101110010001100101110001111  
10011010001011010100110001010001010011110001101100100010100111011100101010100010  
00100010101011000010011010001110100101100110011011100100101010000110011001110110  
10010001010001011111010111110101100010000000101010011101000010101100110100111011  
10011110100011000110100000101111010011111000000100000011001000001010101111101011  
1001010000000110100111001110000111100100001011000001000110000000110000110101011

00011100000111001010111011110001111010111101110011101111101111000111001000010011  
01001110110011110000011011101101100000101011111110110111110110001110101100011010  
01000001100100000001110101100101111101011100100011001010101100101010110011001011  
11000011001011101010101100011111101111101000001010000100111100101011010001001011  
10100010111010000011010011000101100010010011101000111001111010100111100001100101  
0100010000111111010010001001110000110111111100001110100001010101100110110001001  
01011010111111011000011110110100011001111101001000101010010000001101000010011000  
11110011000011011101001011001010111111011110101100111010101110110011101000010011  
010100000111101101000110101100111101011101010111111110000000100000000000011001  
00000110111000010111011001111101010000001100001110100011011110010010101000100110  
11101110111011110010101010110101101111010110011010000101101110010001010110110101  
01100010100101000000000011111010101001101000010011101100101110100111010100101101  
11011101110010110101110100011000010101110110110101110111101101100101001010101100  
00001101100110011001100101110011011010000110011000000100000100101000111100001100  
11010100001001110100001101011001011011011110101100101101010000101100011110001001  
11010110010010111001001001100101100001100001000010110101101110010101110001110001  
10011010110111101011100011001110001010000111001100100110001101000100111000110001  
11010101100110100101100110010110001100100010000010110001101001001100010000100111  
01110001110101000101010011101100011110001111000100100011100100111011111110110100  
10101100010101000001100010001110010110010001000100111101011111000011010101000100  
0001111100010101101010100011010010100001000101000000011100000011010111110000000  
01101111110000111010110101110000111111000000110101100011001100011100011011010100  
01111001111101001000010010111111001110011100101111111011110110010101111001100110  
01001110001110011011111010111101110001011011000010011101100111010101101110001111  
10001001000001011101100110000000010111001000000110011001010001010111110101000100  
01001010100100001001001100010110110011000101100011010011100010110011101000100101  
11000111000101001011111010001101010000100010100101100100111010010111001001001100  
00000011001110110110011101001000101011001011110000101110000001011100101010101111  
0111001101111100100101010110001000101110011001001000001111110100000011100000111  
10011001100110101111110001001000001010011001010100010111000000011100011011101101  
01011111001001111100111000100011000101110111000010010110010101010100000111110101  
11110010100001111001011111110010111111101100101111011001100001001101001101000011  
01011100111001010100011111001000100011000011100001000110011011100010100001100101  
00100011010101101000001111010100010001000111111001001011001100100111010101111001  
00000011000001011000110010100001000110101001000000111111001110111010101000111000  
01100100100100110010101110000000101001111101000000101101011000011011010100001100  
00011111111100101000000111010101110111010010100101000111110110100100011000100100  
10111011110001111100011110111001010010010110001001110001011110101110110100101000  
01000011100101011100010000101111001001010011110000010111111101001001001011110100  
00000001101110110110110000010111101010010101110000110010100101101011010000100100  
11011011000001011010111110101000111001111010110100100101011000011010110010100001  
11110100111111010110111000001110101101010111111110000011000111100100000000100010  
01111111110111010110011010100011001111111111110001011011111110000100001101110000  
10101110111101110001000110000101011101100011010011010000110011110100000110001001  
00000000001011011101111010000111100001110101011101101100011000110001111100001011  
10011010000101110011110000010110101110000000111001111101100101000001110000010010  
10001010010101000000110010010001110100110011101000011101101011110000111100000010  
00100010100110000110111000111100011101100110000110110010101001111011001101110100  
110111000000011011011000001110010110011001001100111100000111111011110100110110111  
1011010000011101110000011011101100001111010000101001100010001101010011010010  
010100100101100100000110111011101100001111010000101001100010001101010011010010  
010100100101100100000110101111011110110010010101101011010000100100

11110010101011011110111100100010000011100111010001100010010000000100010101001  
101101000110111010111001011000001110111010000011001001000000010000100001100010  
10111101000111000011000001100101000000001100011001111001010110100000101000101001  
1101111010010100011010011010100001010110001101001000001100010101001111110111100  
10101011110101010001111000011000100001111010101000001111100011101011110111110100  
010001010010110101101111011111011100011010010100101001000110110001000011110000010  
01010110111000101100011011000011001111011100100011001010100010011101011010001110  
00000110101011101010101110101010110101110010100001011110111101010001000110101  
1000111001000100001110110101011001110010000000111011011111000100101111000000110  
1010011101000101000110100111001101101011000101001100111111000111010111101000011  
10000101001000100001100001100101001001001101101011010110100111110000010101001011  
011000011100110110111110001101110101001101001010100111101000110111111101111010  
0010101000011110010100001001000011100000101000100110110110111110011101100110  
11101011111101000000010001110101101000101111000101100110101010110110101100010111  
1001000110110000111011100000101101001000110110000110001111000000100011111000000  
1001100101100111101011000110100010100001010110001010011010110100111011101111110  
01001111101011101000111010110001110100110010110011111010011010100100010101110011  
0100011010001100000100110111010000000010010011000101010101101111000100100111010  
00110000110010110000000101010010010001011011011101101111101000010110110011111000  
10011101101110010011011001000111101110110111010011100010010110000001101011101000  
10000010001111010001010011000000001101000011111011111011011110010000101100110101  
01110110010000100001011001000010100011010110111010011000010101101101110100000111  
01001110111001101111010000010001111011100001101101011101110100101010011001110000  
1100110011100001001000101011111100001101000101111101000000110000101001001011110  
0000100011110101101110001011001111011001010000000100101001010111000010100111011  
01110010010010001010100000111010101001010110000101100001000011110001011110100011  
01011111110010000011111001010100001010101001010011111100101101110001011010010100  
11000010001010011110111110011000111101010000011101000110101000001000110000111111  
11001101100001110101110010100100101110010100110100111001000010111011101001000001  
11100110010101111111001000011000100100101011011011101110000011101111011100000101  
0000001101001010110011001100010001101111110001001110000110101111011111010011010  
10010000111111111001100001001111110000100000101111011001010110010110101000111101  
10100101101111101100101010000001101000001010110001011001100110010100011111000001  
11110101111011101011111100011000101100010110110010010110101000010010111110101100  
11101001001101010000000110010110100011000101100111000001011011110111110011011001  
00101110100010100101100011010100011100100011001101011101100000010110101110111011  
10000101111000011100101010100010001111101101001010100110000111001100000011001101  
10111011101100110111000000001011100010111011001111111001011001101001111111000011  
01011001000000110100011110111100011000111111010011000101110111001011100110110010  
1010100011000001011101001010110010111010110110111101111011110111101110101100001  
10101010010011011111111101011001111110110011101011011100101000110100101100110111  
11111101010101001111110011011011110111101011011010000010010000010110101010001001  
11101101110001100101011101010100101010101101101010100011110101011101010111110011  
00101001101110010010101010011000101010001111000010001100100011010110101101100001  
100101111101111011001001101101100011001010000110011001111010010000100100011  
101001111000101011011011011110000101100010101110010011100000001000000101101000  
0010111000010101010001010110100001010110101001001001100010111110111000111010  
11000001000110100000001110000000010000000111100011001000010000100110101100011110  
11101011101010011010111111101001010010100110000000101011000010101100101000110001  
11011100110001110101001110110000001110001101011101000101011100111100100010010101

Infine ecco il 10.000° numero di Fibonacci (2090 cifre):

33644764876431783266621612005107543310302148460680063906564769974680081442166662  
36815559551363373402558206533268083615937373479048386526826304089246305643188735  
45443695598274916066020998841839338646527313000888302692356736131351175792974378  
54413752130520504347701602264758318906527890855154366159582987279682987510631200  
57542878345321551510387081829896979161312785626503319548714021428753269818796204  
69360978799003509623022910263681314931952756302278376284415403605844025721143349  
61180023091208287046088923962328835461505776583271252546093591128203925285393434  
62090424524892940390170623388899108584106518317336043747073790855263176432573399  
37128719375877468974799263058370657428301616374089691784263786242128352581128205  
1637029808933209905707920064367426202389783111470054074998459250360633560933883  
83192338678305613643535189213327973290813373264265263398976392272340788292817795  
35805709936910491754708089318410561463223382174656373212482263830921032977016480  
54726243842374862411453093812206564914032751086643394517512161526545361333111314  
04243685480510676584349352383695965342807176877532834823434555736671973139274627  
36291082106792807847180353291311767789246590899386354593278945237776744061922403  
37638674004021330343297496902028328145933418826817683893072003634795623117103101  
29195316979460763273758925353077255237594378843450406771555577905645044301664011  
94625809722167297586150269684431469520346149322911059706762432685159928347098912  
84706740862008587135016260312071903172086094081298321581077282076353186624611278  
24553720853236530577595643007251774431505153960090516860322034916322264088524885  
24331580515348496224348482993809050704834824493274537326245677558790891871908036  
62058009594743150052402532709746995318770724376825907419939632265984147498193609  
28522394503970716544315642132815768890805878318340491743455627052022356484649519  
61124602683139709750693826487066132645076650746115126775227486215986425307112984  
41182622661057163515069260029861704945425047491378115154139941550671256271197133  
25276363193960690289565028826860836224108205056243070179497617112123306607331005  
9947366875

Chi è interessato a tutti e diecimila i numeri può scaricare il file

[www.4dmatrix.it/math/fn\\_10000.zip](http://www.4dmatrix.it/math/fn_10000.zip)

di 5Mb. Il file decompresso è un documento Microsoft Word® di 2.659 pagine.■

Leonardo Calconi

[leo@4dmatrix.it](mailto:leo@4dmatrix.it)

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: [www.4dmatrix.it/math](http://www.4dmatrix.it/math)