INTEGRALI CURVILINEI 1

Esercizi di calcolo

di Leonardo Calconi

Pubblicato il 02.03.09

1. DEFINIZIONI

Se I è un intervallo della retta reale, una **curva** è un'applicazione continua $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ rappresentata parametricamente dalle componenti:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1(t) \\ x_2 = \alpha_2(t) \\ \ldots \\ x_n = \alpha_n(t) \end{cases}$$

Essa è pertanto una funzione $\alpha(t)$ di variabile reale a valori vettoriali.

Il codominio $\alpha(I)$ di $\alpha(t)$ è detto **sostegno della curva** ed è da essa distinto: infatti la curva è una funzione mentre il suo sostegno è un grafico.

Nell'esercizio (2.3) la curva è il tratto di parabola compreso nell'intervallo $[-1,1]$. Potremmo però considerare una curva costituita dallo stesso tratto di parabola ma nell'intervallo $[1,-1]$; tale curva è diversa dalla prima (perché percorsa in senso contrario a questa) ma ha lo stesso sostegno.

Ugualmente, se nell'es. (4.1) estendiamo il campo di variazione del parametro $0 \le t \le 4\pi$, il sostegno sarà sempre una circonferenza e la curva una circonferenza percorsa due volte anziché una.

L'ordine degli estremi dell'intervallo di definizione stabilisce quindi il **verso di percorrenza** della curva.

Possiamo riunire la curva e l'ordine dei suoi estremi nell'unica definizione di **traiettoria** che utilizzeremo quando occorrerà.

Un **campo vettoriale** è una funzione di variabile vettoriale a valori vettoriali.

La funzione continua e definita in $\alpha(I)$

$$f\left[\alpha(t)\right]$$

sarà pertanto un campo vettoriale.

Consideriamo il prodotto scalare

$$f\left[\alpha(t)\right] \cdot \alpha'(t)$$

Si definisce **integrale curvilineo** di f da a a b lungo $\alpha(t)$ la seguente scrittura

(1.1) $$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\left[\alpha(t)\right] \cdot \alpha'(t)\, dt$$

L'ordine degli estremi dell'intervallo di definizione stabilisce quindi oltre al verso di percorrenza della curva anche il **verso di integrazione** dell'integrale curvilineo (cfr. es. (2.4)).

Se f ed α sono espresse mediante le loro componenti la (1.1) diventa

(1.2) $\int_a^b f_1(x, y)\, dx + \int_a^b f_2(x, y)\, dy$ in uno spazio bidimensionale

(1.3) $\int_a^b f_1(x, y, z)\, dx + \int_a^b f_2(x, y, z)\, dy + \int_a^b f_3(x, y, z)\, dz$ in uno spazio tridimensionale

...

(1.4) $\sum_{k=1}^{n}\int_{a}^{b} f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) dx_k$ in uno spazio *n*-dimensionale

dove $x_1 = \alpha_1(t), x_2 = \alpha_2(t), ..., x_n = \alpha_n(t)$

Se $\alpha(t)$ è una curva aperta $[a,b]$ l'integrale può dirsi **di linea**; se $\alpha(t)$ è una curva chiusa $[a,a]$ esso può dirsi **di contorno** (o anche **circuitazione**).

2. ESERCIZI PARTENDO DAL CAMPO VETTORIALE

La scaletta da seguire nel calcolo è la seguente:

1. Scrivere le equazioni parametriche della curva nel parametro *t*
2. Determinare i valori del parametro agli estremi dell'intervallo $[a,b]$
3. Scrivere la funzione a valori vettoriali $\alpha(t)$
4. Scrivere il campo vettoriale $f\left[\alpha(t)\right]$
5. Calcolare la derivata $\alpha'(t)$
6. Eseguire il prodotto scalare $f\left[\alpha(t)\right]\cdot\alpha'(t)$
7. Calcolare l'integrale di linea nel verso d'integrazione *a,b*

Talvolta la curva è già fornita in equazioni parametriche con o senza intervallo di variazione del parametro *t*. Se gli estremi di tale intervallo non sono forniti essi vanno ricavati dalle equazioni parametriche e dagli estremi della traiettoria.

(2.1)►Ricavare l'integrale di linea e calcolarlo

- Campo vettoriale $f(x,y) = \sqrt{y}i + \left(x^3 + y\right) j$
- Curva $y = x$
- Coordinate degli estremi dell'intervallo $(0,0);(1,1)$

La curva è una retta passante per l'origine inclinata di 45° gradi con gli assi.

Le sue equazioni parametriche sono pertanto $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

da cui si deduce che agli estremi dell'intervallo il parametro *t* assume i valori $(0,1)$.

La funzione a valori vettoriali sarà

$\alpha(t) = ti + tj$

da cui il campo vettoriale relativo ad $\alpha(t)$

$f[\alpha(t)] = \sqrt{t}i + \left(t^3 + t\right) j$

derivando $\alpha(t)$

$\alpha'(t) = i + j$

ora possiamo calcolare il prodotto scalare

$$f\left[\alpha(t)\right]\cdot\alpha'(t) = \left[\sqrt{t}i + \left(t^3 + t\right) j\right]\cdot(i + j) = \sqrt{t} + t^3 + t$$

da cui l'integrale di linea per *t* che varia da 0 a 1

$$\int_0^1\left(\sqrt{t} + t^3 + t\right)dt = \Big|_0^1 \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$$

(2.2)► Ricavare l'integrale di linea e calcolarlo

- Campo vettoriale $f(x,y,z) = x^3 i + 3zy^2 j - x^2 yk$
- La curva è una retta passante per i punti $(0,0,0);(3,2,1)$
- Gli estremi dell'intervallo sono definiti dalle coordinate dei due punti

Le equazioni parametriche della retta per i due punti sono

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = t \\ \dfrac{y}{2} = t \\ \dfrac{z}{1} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

da cui si deduce che agli estremi dell'intervallo il parametro t assume i valori $(1,0)$.

La funzione a valori vettoriali sarà

$\alpha(t) = 3ti + 2tj + tk$

scriviamo il campo vettoriale per $\alpha(t)$

$f[\alpha(t)] = 27t^3 i + 12t^3 j - 18t^3 k$

deriviamo $\alpha(t)$

$\alpha'(t) = 3i + 2j + k$

calcoliamo il prodotto scalare

$f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = (27t^3 i + 12t^3 j - 18t^3 k) \cdot (3i + 2j + k) = 81t^3 + 24t^3 - 18t^3 = 87t^3$

da cui l'integrale di linea per l'intervallo $(1,0)$

$$\int_1^0 87t^3 dt = -\frac{87}{4}$$

(2.3)► Ricavare l'integrale di linea e calcolarlo

- Campo vettoriale $f(x,y) = (x^2 - 2xy)i + (y^2 - 2xy)j$
- Curva $y = x^2$
- Coordinate degli estremi dell'intervallo $(-1,1);(1,1)$

La curva è una parabola con il vertice nell'origine, asse l'asse delle y, concavità superiore.

Le sue equazioni parametriche sono dunque $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

da cui si deduce che agli estremi dell'intervallo il parametro t assume i valori $(-1,1)$.

La funzione a valori vettoriali, la sua derivata e il relativo campo vettoriale saranno

$\alpha(t) = ti + t^2 j$

$\alpha'(t) = i + 2tj$

$f[\alpha(t)] = (t^2 - 2t^3)i + (t^4 - 2t^3)j$

Calcoliamo il prodotto scalare

$f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = [(t^2 - 2t^3)i + (t^4 - 2t^3)j] \cdot (i + 2tj) = t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4$

e quindi l'integrale di linea in t per $-1 \le t \le 1$

$$\int_{-1}^{1}\left(t^2-2t^3+2t^5-4t^4\right)dt=\Big|_{-1}^{1}\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3}-\frac{4t^5}{5}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)=-\frac{14}{15}$$

(2.4)► Calcolare l'integrale di linea lungo la semiellisse superiore centrata sull'origine.

- Campo vettoriale y^2i+x^2j
- Curva $x=a\cos(t), y=b\sin(t)$
- Intervallo $\pi\le t\le 0$

In questo caso abbiamo già le equazioni parametriche con l'intervallo di variazione del parametro.

$\alpha(t)=a\cos(t)i+b\sin(t)j$

$f\left[\alpha(t)\right]=b^2\sin^2(t)i+a^2\cos^2(t)j$

Deriviamo $\alpha(t)$

$\alpha'(t)=-a\sin(t)i+b\cos(t)j$

Eseguiamo il prodotto scalare

$$f\left[\alpha(t)\right]\cdot\alpha'(t)=\left[b^2\sin^2(t)+a^2\cos^2(t)\right]\cdot\left[-a\sin(t)+b\cos(t)\right]=-ab^2\sin^3(t)+a^2b\cos^3(t)$$

ed infine l'integrale di linea tenendo conto che il verso d'integrazione è orario

$$\int_{\pi}^{0}\left[-ab^2\sin^3(t)+a^2b\cos^3(t)\right]dt=$$

$$\Big|_{\pi}^{0}-ab^2\left[\frac{\sin^2(t)\cos(t)}{3}-\frac{2\cos(t)}{3}\right]+a^2b\left[\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{3}+\frac{2\sin(t)}{3}\right]=\frac{4ab^2}{3}$$

Si verifica facilmente che invertendo il verso d'integrazione l'integrale di linea cambia soltanto il segno

$$\int_{0}^{\pi}\left[-ab^2\sin^3(t)+a^2b\cos^3(t)\right]dt=-\frac{4ab^2}{3}$$

3 ESERCIZI PARTENDO DALL'INTEGRALE

Spesso l'integrale da calcolare viene fornito direttamente in forma esplicita con le formule (1.2) (1.3),(1.4). La scaletta da seguire nei calcoli rimane la stessa.

(3.1) ►Calcolare l'integrale di linea

$$\int_{0}^{2\pi}(2a-y)\,dx+x\,dy$$

lungo la curva

$$\begin{cases}x=a\left(t-\sin(t)\right)\\ y=a\left(1-\cos(t)\right)\end{cases}.\quad 0\le t\le 2\pi$$

Le equazioni parametriche ci dicono che la curva è una cicloide sviluppata sull'asse positivo delle *x* da una circonferenza di raggio *a* e gli estremi d'integrazione che la traiettoria è il suo primo arco.

Deriviamo le equazioni parametriche

$dx=a\left(1-\cos(t)\right)dt$

$dy=a\sin(t)\,dt$

Applichiamo la (1.2)

$$\int_0^{2\pi}\left[2a-a\left(1-\cos(t)\right)\right]a\left(1-\cos(t)\right)dt+\int_0^{2\pi}\left[a\left(t-\sin(t)\right)\right]a\sin(t)\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[a^2-a^2\cos^2(t)\right]dt+\int_0^{2\pi}\left[a^2t\sin(t)-a^2\sin^2(t)\right]dt=$$

$$\Big|_0^{2\pi} a^2t-\frac{a^2\sin(t)\cos(t)}{2}-\frac{a^2t}{2}+\Big|_0^{2\pi} a^2\sin(t)-a^2t\cos(t)-\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2\sin(t)\cos(t)}{2}=$$

$$\Big|_0^{2\pi} a^2\sin(t)-a^2t\cos(t)=-a^2 2\pi$$

(3.2)► Calcolare l'integrale di linea

$$\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$$

lungo la traiettoria

$$\begin{cases} x=a\cos(t) \\ y=a\sin(t) \qquad 0\le t\le 2\pi \\ z=bt \end{cases}$$

La curva è una spira di elica cilindrica di raggio **a** e passo *b*. Deriviamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} dx=-a\sin(t)\,dt \\ dy=a\cos(t)\,dt \\ dz=bdt \end{cases}$$

Applichiamo la (1.2)

$$\int_0^{2\pi}\left(a\sin(t)-bt\right)\left(-a\sin(t)\right)dt+\int_0^{2\pi}\left(bt-a\cos(t)\right)a\cos(t)\,dt+\int_0^{2\pi}\left(a\cos(t)-a\sin(t)\right)bdt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-a^2\sin^2(t)+abt\sin(t)\right)dt+\int_0^{2\pi}\left(abt\cos(t)-a^2\cos^2(t)\right)dt+\int_0^{2\pi}\left(ab\cos(t)-ab\sin(t)\right)dt=$$

$$\Big|_0^{2\pi} -\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2\sin(t)\cos(t)}{2}+ab\sin(t)-abt\cos(t)+$$

$$\Big|_0^{2\pi} ab\cos(t)+abt\sin(t)-\frac{a^2\sin(t)\cos(t)}{2}-\frac{a^2t}{2}+$$

$$\Big|_0^{2\pi} ab\sin(t)+ab\cos(t)=$$

$$\Big|_0^{2\pi} -a^2t+2ab\cos(t)+2ab\sin(t)-abt\cos(t)+abt\sin(t)=-a^2 2\pi+2ab-ab2\pi-2ab=-2a\pi(a+b)$$

4 ESERCIZI SUL CAMMINO D'INTEGRAZIONE

(4.1)► Calcolare l'integrale di contorno

$$\oint_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$$

lungo la circonferenza

$$x^2+y^2=a^2$$

percorsa una volta in senso antiorario e una volta in senso orario.
La notazione precedente equivale rispettivamente a

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}, \qquad \int_{2\pi}^{0} \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$$

Utilizziamo le equazioni parametriche della circonferenza

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\sin(t) \end{cases}$$

Deriviamo

$$dx = -a\sin(t)\,dt$$

$$dy = a\cos(t)\,dt$$

Impostiamo l'integrale per il calcolo

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\Big[\big(a\cos(t)+a\sin(t)\big)\big(-a\sin(t)\big)-\big(a\cos(t)-a\sin(t)\big)\big(a\cos(t)\big)\Big]dt$$

$$\int_0^{2\pi}\Big[-\cos(t)\sin(t)-\sin^2(t)-\cos^2(t)+\sin(t)\cos(t)\Big]dt = \int_0^{2\pi}\Big[-\sin^2 t-\cos^2 t\Big]dt =$$

$$\Big|_0^{2\pi} -t$$

Pertanto avremo:
-2π per la traiettoria antioraria
2π per la traiettoria oraria
Dal che si deduce che invertendo la traiettoria l'integrale curvilineo cambia di segno.

(4.2)►Calcolare lungo la stessa circonferenza l'integrale di contorno

$$\oint_C y^2dx + 2xydy$$

Eseguendo i calcoli avremo

$$\int_0^{2\pi}\Big[-a^3\sin^3(t)+2a^3\sin(t)\cos^2(t)\Big]dt$$

$$\Big|_0^{2\pi} a^3\left[\frac{\sin^2(t)\cos(t)}{3}+\frac{2\cos(t)}{3}-\frac{\cos^3 t}{3}\right]=$$

$$\Big|_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\cos(t)\Big[\sin^2(t)-\cos^2(t)+2\Big]=\Big|_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\cos(t)\Big[1-2\cos^2(t)+2\Big]=$$

$$\Big|_0^{2\pi} a^3\cos(t)-\frac{2}{3}a^3\cos^3(t)=0$$

E' ovvio che se invertiamo il cammino d'integrazione l'integrale curvilineo vale ancora zero:

$$\Big|_{2\pi}^{0} a^3\cos(t)-\frac{2}{3}a^3\cos^3(t)=0$$

Ora osserviamo che la funzione integranda $y^2dx+2xydy$ è un differenziale esatto

$$\frac{dy^2}{dy}=\frac{d\,2xy}{dx}=2y$$

Allora se il cammino d'integrazione è chiuso e la funzione integranda è un differenziale esatto, l'integrale curvilineo vale sempre zero.
Se il cammino d'integrazione è chiuso e la funzione integranda non è un differenziale esatto, l'integrale curvilineo può essere diverso da zero (cfr. prec. (4.1)) o zero.
Pertanto è buona norma controllare sempre se la funzione integranda è un differenziale esatto prima di procedere all'integrazione.

(4.3)► Calcolare l'integrale di linea

$$\int_C \left(2xy - y^4 + 3\right) dx + \left(x^2 - 4xy^3\right) dy$$

lungo la traiettoria $(1,0);(2,0);(2,1)$.

Le equazioni parametriche del primo tratto $(1,0);(2,0)$ sono

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 1 \le t \le 2$$

deriviamo

$$dx = dt$$

$$dy = 0$$

e scriviamo l'integrale curvilineo del primo tratto

$$\int_1^2 3dt$$

Per il secondo tratto $(2,0);(2,1)$ abbiamo

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$dx = 0$$

$$dy = dt$$

$$\int_0^1 \left(4 - 8t^3\right) dt$$

Ora componiamo l'integrale curvilineo per l'intera traiettoria

$$\int_1^2 3dt + \int_0^1 \left(4 - 8t^3\right) dt$$

e risolviamolo

$$\Big|_1^2 \, 3t + \Big|_0^1 \, 4t - \frac{8t^4}{4} = 3 + 2 = 5$$

Ora invertiamo la traiettoria e ricalcoliamo l'integrale curvilineo

$$\int_1^0 \left(4 - 8t^3\right) dt + \int_2^1 3dx$$

$$\Big|_1^0 \, 4t - \frac{8t^4}{4} + \Big|_2^1 \, 3t = -2 - 3 = -5$$

Come ci aspettavamo invertendo la traiettoria cambia il segno dell'integrale curvilineo.
Ora calcoliamo tale integrale lungo la traiettoria $(1,0);(2,1)$

La curva è una retta inclinata di 45° con l'asse delle *x* che viene da essa intercettata nel punto $(1,0)$.

Le equazioni parametriche di tale retta sono

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

deriviamo

$dx = dt$

$dy = dt$

Scriviamo l'integrale di linea e risolviamolo

$$\int_0^1 \left[\left(2(t+1)t - t^4 + 3 \right) + \left((t+1)^2 - 4(t+1)t^3 \right) \right] dt$$

$$\int_0^1 \left(2t^2 + 2t - t^4 + 3 + t^2 + 1 + 2t - 4t^4 - 4t^3 \right) dt = \int_0^1 \left(-5t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t + 4 \right) dt$$

$$\Big|_0^1 -t^5 - t^4 + t^3 + 2t^2 + 4t = 5$$

Anche in questo caso è evidente che invertendo la traiettoria l'integrale curvilineo cambia segno.
Ora vogliamo controllare se la funzione integranda è un differenziale esatto:

$$\frac{2xy - y^4 + 3}{dy} = 2x - 4y^3$$

$$\frac{x^2 - 4xy^3}{dx} = 2x - 4y^3$$

Poiché lo è possiamo affermare che l'integrale curvilineo di un differenziale esatto è indipendente dalla traiettoria scelta mentre dipende dai suoi estremi e dal suo verso.
La logica conseguenza è che dovendo eseguire l'integrale curvilineo di un differenziale esatto possiamo scegliere la traiettoria che comporta i calcoli più semplici.
Pertanto anche per integrali di linea è bene controllare sempre se la funzione integranda è un differenziale esatto prima di procedere all'integrazione.

5 CALCOLO DI AREE PIANE

(5.1)► Calcolare lungo la circonferenza (4.1) e lungo l'ellisse (2.4) l'integrale di contorno

$$\frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

La funzione integranda non è un differenziale esatto e quindi l'integrale di contorno non è necessariamente uguale a zero. Eseguiamo i semplici calcoli ed otteniamo

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos^2(t) + \sin^2(t) \right] dt = \frac{a^2}{2} \Big|_0^{2\pi} t = a^2 \pi$$

ovvero l'area del cerchio di raggio *a*.
L'integrale curvilineo proposto è dunque alternativo all'integrale di campo per il calcolo dell'area di una qualunque superficie piana.
E' immediato verificare che la superficie dell'ellisse vale $ab\pi$ ed è appena il caso di notare come l'integrale curvilineo

$$\oint_C xdy - ydx$$

valga il doppio dell'area delimitata dalla curva..

(5.2)► Calcolare la superficie dell'asteroide

$$\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = a\sin^3(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dx = -3a\cos^2(t)\sin(t)\,dt$$

$$dy = 3a\sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[3a^2\sin^2(t)\cos^4(t) + 3a^2\sin^4(t)\cos^2(t)\right]dt$$

$$\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin^2(t)\cos^2(t)\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)\right]dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt$$

$$\frac{3a^2}{2}\Big|_0^{2\pi}\frac{\sin(t)\cos(t)}{8} - \frac{\sin(t)\cos^3(t)}{4} + \frac{t}{8} = \frac{3a^2\pi}{8}$$

(5.3)► Calcolare l'area della cardioide

$$\begin{cases} x = a\left(2\cos(t) - \cos(2t)\right) \\ y = a\left(2\sin(t) - \sin(2t)\right) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dx = a\left(-2\sin(t) + 2\sin(2t)\right)$$

$$dy = a\left(2\cos(t) - 2\cos(2t)\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left[\left(2\cos(t)-\cos(2t)\right)\left(2\cos(t)-2\cos(2t)\right) - \left(2\sin(t)-\sin(2t)\right)\left(-2\sin(t)+2\sin(2t)\right)\right]dt$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} 4\cos^2(t) - 4\cos(t)\cos(2t) - 2\cos(t)\cos(2t) + 2\cos^2(2t) + \\ 4\sin^2(t) - 4\sin(t)\sin(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 2\sin^2(2t) \end{bmatrix}dt$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[6 - 6\cos(t)\cos(2t) - 6\sin(t)\sin(2t)\right]dt$$

Applichiamo le formule di duplicazione per semplificare l'integrale

$$3a^2\int_0^{2\pi}dt - 3a^2\int_0^{2\pi}\left[\cos(t)\left(\cos^2(t)-\sin^2(t)\right) + \sin(t)\left(\sin(t)\cos(t)\right)\right]dt = 3a^2\int_0^{2\pi}dt - 3a^2\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\,dt$$

$$3a^2\Big|_0^{2\pi} t - \frac{\sin(t)\cos^2(t) + 2\sin(t)}{3} = 6a^2\pi$$

(5.4)► Calcolare l'area dell'arco della cicloide (3.1)

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\left(t-\sin(t)\right)a\sin(t) - a\left(1-\cos(t)\right)a\left(1-\cos(t)\right)\right]dt =$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[t\sin(t) - \sin^2(t) - 1 - \cos^2(t) + 2\cos(t)\right]dt =$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[t\sin(t) + 2\cos(t) - 2\right]dt$$

$$\frac{a^2}{2}\Big|_0^{2\pi}\sin(t) - t\cos(t) + 2\sin(t) - 2t = \frac{a^2}{2}\left(-2\pi - 4\pi\right) = -a^2 3\pi$$

Invertendo il verso d'integrazione otteniamo l'area cercata.

6 CALCOLO DI LUNGHEZZE

Possiamo utilizzare gli integrali di linea per calcolare la lunghezza di un arco di curva nel piano o nello spazio.

(6.1)► Calcolare gli integrali di linea

$$\int_C \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) dx \,,\ \int_C \left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right) dy$$

lungo la diagonale di un quadrato di lato unitario $y = x$ da $(0,0)$ a $(1,1)$.

Le equazioni parametriche e le loro derivate sono

$$\begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = t & dy = dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

Eseguiamo i calcoli

$$\int_0^1 \left(\sqrt{1+\left(\frac{dt}{dt}\right)^2} \right) dt$$

$$\Big|_0^1 \left(\sqrt{2}\right) t = \sqrt{2}$$

Si verifica immediatamente che l'integrale curvilineo

$$\int_C \left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right) dy$$

fornisce lo stesso risultato.

(6.2)► Calcolare l'integrale di contorno

$$\oint_C \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \right] dt$$

lungo la circonferenza di raggio a.

$$\begin{cases} x = a\cos(t) & dx = -a\sin(t)\,dt \\ y = a\sin(t) & dy = a\cos(t)\,dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \left[a\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \right] dt$$

$$\Big|_0^{2\pi} at = a2\pi$$

Pertanto l'integrale di linea proposto in questo esercizio, al pari dei due proposti nell'esercizio precedente, è utile per il calcolo della lunghezza di una curva piana secondo l'uguaglianza:

$$\int_C \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) dx = \int_C \left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right) dy = \int_C \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \right] dt$$

(6.3)► Calcolare la lunghezza della diagonale del cubo.

Estendendo la (6.2) allo spazio tridimensionale dovremo calcolare l'integrale di linea

$$\int_C \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \right] dt$$

Consideriamo un cubo di spigolo unitario con un vertice nell'origine degli assi ed orientato secondo essi. Le equazioni parametriche della diagonale saranno

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \qquad 0 \le t \le 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 1$$

$$\int_0^1 \left[\sqrt{1+1+1} \right] dx$$

$$\Big|_0^1 \; x\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Si verifica immediatamente che lo stesso risultato si ottiene con un'estensione allo spazio tridimensionale della (6.1)

$$\int_C \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \right] dx$$

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo:
www.4dmatrix.it/math