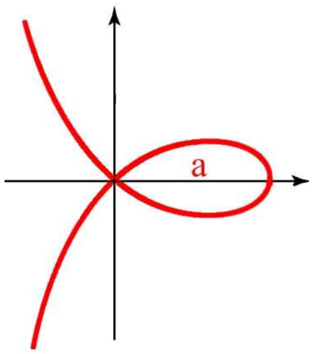
INTEGRALI CURVILINEI 2

Lunghezze di curve note
di Leonardo Calconi
Pubblicato il 04.03.09

(1.1)► **STROFOIDE** $C_{STF} = \frac{4a}{\sqrt{3}}$



Calcolare la lunghezza del cappio di strofoide destra di diametro *a* di equazione

$$3ay^2 = x(x-a)^2$$

con $a, x > 0$

La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle *x* e non abbiamo equazioni parametriche, pertanto la esplicitiamo rispetto alla *y*:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)^2}{3a}} = \pm|x-a|\sqrt{\frac{x}{3a}}$$

La curva sarà descritta da quattro equazioni esplicite ciascuna relativa ad una sua parte

a) $y = (x-a)\sqrt{\frac{x}{3a}}$ coda superiore

b) $y = -(x-a)\sqrt{\frac{x}{3a}}$ coda inferiore

c) $y = (a-x)\sqrt{\frac{x}{3a}}$ semi-cappio superiore

d) $y = -(a-x)\sqrt{\frac{x}{3a}}$ semi-cappio inferiore

Ora sarà sufficiente calcolare la lunghezza del semi-cappio superiore e moltiplicare per due.
Poiché si ha $a, x > 0$ possiamo scrivere

$$y = (a-x)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3a}}$$

deriviamo rispetto ad *x*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-3x}{2\sqrt{3ax}}$$

Senza passare per le equazioni parametriche abbiamo

$$\int_0^a \left(\sqrt{1+\left(\frac{a-3x}{2\sqrt{3ax}}\right)^2}\right)dx = \int_0^a \left(\sqrt{\frac{12ax+(a-3x)^2}{12ax}}\right)dx = \int_0^a \left(\sqrt{\frac{12ax+a^2+9x^2-6ax}{12ax}}\right)dx =$$

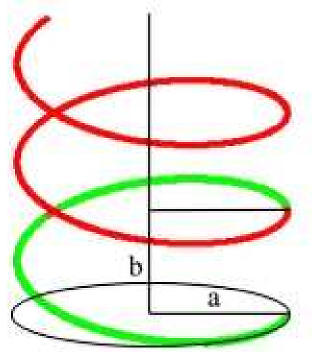
$$\int_0^a \left(\sqrt{\frac{(a+3x)^2}{12ax}}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{3a}}\int_0^a \left(\frac{a+3x}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[a\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{3}{2}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{x}}dx\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3a}}\left[a\int_0^a \frac{d\sqrt{x}}{dx}dx + \int_0^a \frac{3}{2}\sqrt{x}dx\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{3a}}\left[a\Big|_0^a \sqrt{x}+\Big|_0^a x\sqrt{x}\right]=\frac{1}{\sqrt{3a}}\left[a\sqrt{a}+a\sqrt{a}\right]=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

La lunghezza del cappio di strofoide sarà dunque $C_{STF}=\frac{4a}{\sqrt{3}}$

(1.2)► **ELICA CILINDRICA** $C_{HEL}=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$



Calcolare la lunghezza di una spira dell'elica cilindrica di raggio *a* e passo *b*.

$$\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{a^2\sin(t)^2+a^2\cos^2(t)+b^2}\right]dt=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}dt$$

La lunghezza cercata sarà

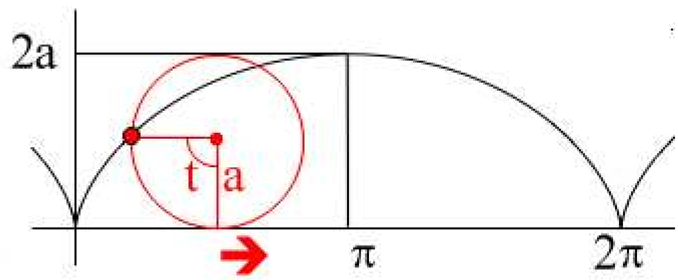
$C_{HEL}=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

Se è $b=0$ (distanza tra le spire nulla), si tratta di una circonferenza della quale è confermata la lunghezza $2\pi a$.

Pertanto gli integrali proposti in questo esercizio e nel precedente sono utili al calcolo della lunghezza di una curva tridimensionale secondo l'uguaglianza:

$$\int_C\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\right]dt=\int_C\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]dx$$

(1.3)► **CICLOIDE** $C_{CYC}=8a$



Calcolare la lunghezza dell'arco della cicloide con *a* raggio della circonferenza generatrice.

$$\begin{cases}x=a(t-\sin(t))\\ y=a(1-\cos(t))\end{cases}.\quad 0\le t\le 2\pi$$

$dx=a(1-\cos(t))dt$

$dy=a\sin(t)dt$

$$\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\cos^2 t-2cos(t)+\sin^2(t)}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2-2\cos(t)}dt$$

L'integrale non è facilmente risolvibile, ma possiamo semplificarlo utilizzando le formule di bisezione

$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1-\cos(t)}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}a\sqrt{2-2\cos(t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\frac{1-\cos(t)}{2}\right)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

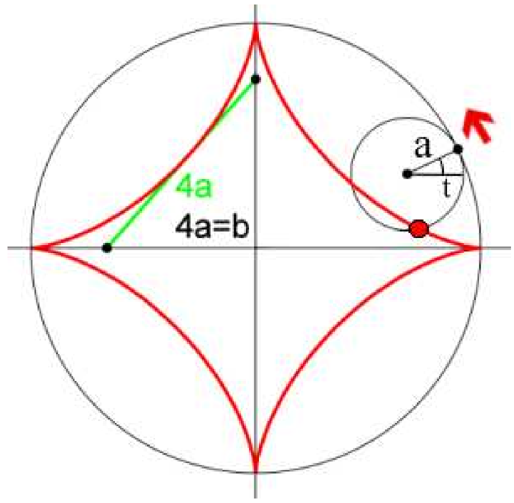
$$2a\Big|_0^{2\pi}-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)=4a+4a$$

Come ci aspettavamo la lunghezza di un arco di cicloide è pari a quattro volte la sua altezza.

(1.4)► **IPOCICLOIDE** $C_{HYP}=8(n-1)a$

Calcolare la lunghezza dell'ipocicloide a quattro cuspidi con *a* raggio della circonferenza generatrice e *b* raggio della circonferenza di rotolamento.

Ponendo $b-a=m$ le equazioni parametriche dell'ipocicloide sono



$$\begin{cases} x = m\cos(t) + a\cos\left(\dfrac{mt}{a}\right) \\ y = m\sin(t) - a\sin\left(\dfrac{mt}{a}\right) \end{cases}$$

Derivando rispetto al parametro t

$$\frac{dx}{dt} = -m\sin(t) - m\sin\left(\frac{mt}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = m\cos(t) - m\cos\left(\frac{mt}{a}\right)$$

si ha l'integrale curvilineo

$$\int_C \left[\sqrt{\left(-m\sin(t) - m\sin\left(\frac{mt}{a}\right)\right)^2 + \left(m\cos t - m\cos\left(\frac{mt}{a}\right)\right)^2}\right] dt =$$

$$\int_C \left[m\sqrt{2 + 2\left(\sin(t)\sin\left(\frac{mt}{a}\right) - \cos(t)\cos\left(\frac{mt}{a}\right)\right)}\right] dt =$$

Applicando le formule di Werner si ottiene

$$m\int_C \left[\sqrt{2 + 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(t - \frac{mt}{a}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(t + \frac{mt}{a}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(t + \frac{mt}{a}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(t - \frac{mt}{a}\right)\right)}\right] dt =$$

$$m\int_C \left[\sqrt{2 - 2\cos\left(t + \frac{mt}{a}\right)}\right] dt =$$

Applicando le formule di bisezione

$$m\int_C \left[\sqrt{4\left(\frac{1-\cos\left(t + \frac{mt}{a}\right)}{2}\right)}\right] dt = 2m\int_C \sin\left(\frac{at+mt}{2a}\right)$$

Scegliamo come campo di variazione del parametro $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$2(b-a)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2a}{b}\cos\left(\frac{bt}{2a}\right)$$

Il numero delle cuspidi è dato dal rapporto $\dfrac{b}{a} = n$; scegliendo $n = 4$:

$$6a\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos(2t) = -3a(-1-1) = 6a$$

Moltiplicando per 4 otteniamo la lunghezza dell'ipocicloide $24a$, il che è ci fornisce la formula per la lunghezza di un'ipocicloide a n cuspidi $C_{HYP} = 8(n-1)a$.

Si noti che l'ipocicloide tetracuspide (detta anche *cubocicloide*) è uguale all'asteroide che si ottiene come inviluppo di un segmento di lunghezza fissa, in questo caso $4a$.

(1.5)► **ASTEROIDE** $C_{AST}=6b$

Calcolare la lunghezza dell'asteroide con b segmento generatore.

Calcoliamo la lunghezza di un arco con $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ e poi quadruplichiamo

$$\begin{cases} x=b\cos^3(t) & dx=-3b\cos^2(t)\sin(t)\,dt \\ y=b\sin^3(t) & dy=3b\sin^2(t)\cos(t)\,dt \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9b^2\cos^4(t)\sin^2(t)+9b^2\sin^4(t)\cos^2(t)}dt=3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)\cos(t)}{2}\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}dt$$

$$3b\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin^2(t)}{2}=\frac{3b}{2}$$

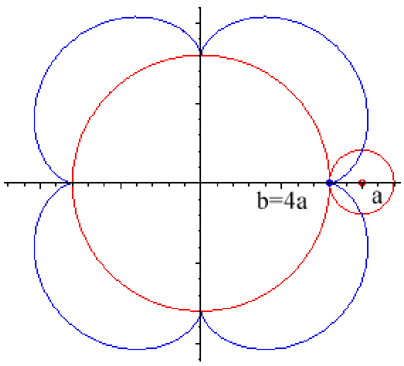
$$C_{AST}=6b$$

Pertanto la lunghezza di un'asteroide è sei volte la lunghezza del segmento generatore il quale è 4 volte il raggio della circonferenza generatrice della corrispondente ipocicloide tetracuspide, il che fornisce la prova della coincidenza delle due curve.

(1.6)► **EPICICLOIDE** $C_{EPI}=8(n+1)a$

Se la circonferenza mobile percorre l'esterno della circonferenza fissa si ha l'epicicloide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=m\cos(t)-a\cos\left(\frac{mt}{a}\right) \\ y=m\sin(t)-a\sin\left(\frac{mt}{a}\right) \end{cases}$$



con $m=a+b$

Derivando rispetto al parametro t

$$\frac{dx}{dt}=-m\sin(t)+m\sin\left(\frac{mt}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=m\cos(t)-m\cos\left(\frac{mt}{a}\right)$$

similmente all'ipocicloide si ha l'integrale curvilineo

$$\int_C\left[m\sqrt{2-2\left(\sin(t)\sin\left(\frac{mt}{a}\right)+\cos(t)\cos\left(\frac{mt}{a}\right)\right)}\right]dt=$$

Applicando le formule di Werner e quelle di bisezione si ottiene

$$2m\int_C\sin\left(\frac{at-mt}{2a}\right)$$

Scegliendo per il campo di variazione del parametro $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ si ha

$$2(a+b)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{b}\cos\left(-\frac{bt}{2a}\right)$$

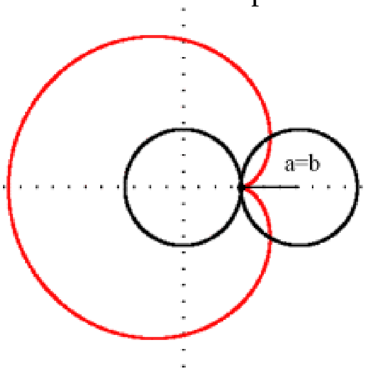
Il numero dei lobi è dato dal rapporto $\frac{b}{a} = n$; scegliendo $n = 4$:

$$10a\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2t) = 5a(1+1) = 10a$$

La lunghezza dell'epicicloide quadrilobata sarà dunque $40a$, essendo $C_{EPI} = 8(n+1)a$ quella generica dell'epicicloide.

(1.7)► **CARDIOIDE** $C_{CAR} = 16a$

La cardioide è un'epicicloide monolobata



il che è evidente se $n = 1 \Rightarrow a = b$.

La sua lunghezza (calcolata dal matematico-pittore-astronomo Philippe de La Hire nel 1708) è quindi deducibile dall'equazione generica dell'epicicloide.

Possiamo ottenere la conferma mediante il calcolo diretto dell'integrale curvilineo e tenendo presente che le sue equazioni parametriche sono

$$x = 2a\cos(t)(1-\cos(t))$$

$$y = 2a\sin(t)(1-\cos(t))$$

Derivando rispetto al parametro

$$\frac{dx}{dt} = -2a\sin(t) + 2a\sin(t)\cos(t) + 2a\sin(t)\cos(t) = -2a\sin(t) + 4a\sin(t)\cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a\cos(t) - 2a\cos^2(t) + 2a\sin^2(t) = 2a\cos(t) + a - 4a\cos^2$$

ed integrando per metà curva otteniamo

$$2a\int_0^{\pi}\sqrt{2 - 4\cos(t)\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) + 2\cos(t)}dt = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2 - 2\cos(t)}dt$$

da cui, applicando le formule di bisezione

$$4a\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$4a\Big|_0^{\pi} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 4a(1+1) = 8a$$

Pertanto la lunghezza totale della cardioide sarà $C_{CAR} = 16a$ ■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math