

LIMITI COL TEOREMA DI L'HOPITAL

Esercizi sulla rimozione delle forme indeterminate

di Leonardo Calconi

Publicato il 04/05/2007

Prima revisione: il 24.01.08

L'applicazione del teorema di L'Hopital comporta processi iterativi di derivazione che possono diventare molto pesanti. Pertanto è bene verificare prima se è possibile rimuovere la forma indeterminata con semplici operazioni di trasformazione algebrica.

Ecco un esempio per il quale sarebbe insensato applicare il teorema di L'Hopital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)(3x^2 - x^3 + 3)}{(x^2 + 2x + 2)\left(\frac{x}{2} + 1\right)} &= -\infty \\ &= \frac{2(2x+1)(3x^2 - x^3 + 3)}{(x^2 + 2x + 2)(x+2)} = \frac{4x+2}{x+2} \cdot \frac{3x^2 - x^3 + 3}{x^2 + 2x + 2} = \frac{4 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \cdot \frac{3 - x + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \mapsto -\infty \end{aligned}$$

E' anche possibile che sia conveniente applicare una o più volte il teorema e poi procedere ad una trasformazione algebrica che porti ad un limite notevole; nell'esempio che segue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} &= \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{3x^2} \mapsto \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Infine, il fatto che applicando il teorema di L'Hopital non si riesca eventualmente ad ottenere un limite finale dopo un numero qualsiasi di passaggi non significa che tale limite non esista.

Riscontrate questa affermazione nell'esercizio (1.2)

Le forme indeterminate sotto le quali può presentarsi un limite sono in totale sette:

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & \infty \\ \frac{0}{\infty} & \frac{\infty}{0} \end{matrix}}; 0 \cdot \infty; 1^\infty; \infty^0; 0^0; \infty - \infty$$

Le prime due forme sono considerate *fondamentali* in quanto consentono l'applicazione diretta del teorema di L'Hopital. Le altre cinque devono essere ricondotte ad una di queste due mediante trasformazioni algebriche.

Non sono indeterminate le forme seguenti:

$$\begin{aligned} (\pm\infty)(\pm a) &= (\pm\infty)(\operatorname{sgn} a); \pm a \pm \infty = (\operatorname{sgn} \infty)\infty; (\pm\infty)(\pm\infty) = (\operatorname{sgn} \infty)(\operatorname{sgn} \infty)\infty \\ \frac{\pm a}{0} &= \infty; \frac{\pm\infty}{0} = \infty; \frac{\pm a}{\pm\infty} = 0; \frac{\pm\infty}{\pm a} = (\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} \infty)\infty; 0^{+\infty} = 0; 0^{-\infty} = \infty \end{aligned}$$

Notazioni

sgn Segno di...

\Rightarrow Applicazione del teorema di L'Hopital

\mapsto Passaggio al limite

1 FORME INDETERMINATE $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Applicare direttamente il teorema con $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(1.1)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 4}{4x - 13} \Rightarrow \frac{2}{4} \mapsto \frac{1}{2} \text{ Questo è un errore !}$$

Ricordate che il processo di applicazione iterativa del teorema di L'Hopital deve arrestarsi quando è stata rimossa la forma indeterminata:

$$\Rightarrow \frac{2x - 4}{4x - 13} \mapsto \frac{2}{-1} = -2 \text{ Corretto !}$$

(1.2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1 \text{ Questo limite non può essere calcolato con L'Hopital !}$$

Infatti esso esiste, ma i rapporti per qualsiasi ordine di derivazione rimangono forme indeterminate. Pertanto limiti di tal genere vanno risolti direttamente:

$$1 - \frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \mapsto 1$$

(1.3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ax^{a-1}} \mapsto 0$$

(1.4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1 + x^2} \cdot x \Rightarrow \frac{4x}{2x} \mapsto 2$$

(1.5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} \Rightarrow \frac{-\sin x - \sin x - x \cos x + \sin x}{6x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x - \cos x + x \sin x}{6} \mapsto -\frac{1}{3}$$

(1.6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\Rightarrow a(1+x)^{a-1} \mapsto a$$

(1.7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4} = \infty$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \frac{e^x}{24} \mapsto \infty$$

(1.8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^5 x}{x^4} = 0$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \frac{120}{x} \mapsto 0$$

(1.9)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \cdot 3\sqrt[3]{x^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \mapsto 0$$

(1.10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + \sin x}{\sin x} \mapsto \frac{2+1}{1} = 3$$

(1.11)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin x \cos x - \frac{2}{\cos^2 x}}{-4 \sin 4x} \Rightarrow \frac{4 \cos^2 x - 2 - \frac{4 \sin x}{\cos^3 x}}{-16 \cos 4x} \mapsto \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

(1.12)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} &= \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 5x}{5} &\Rightarrow \frac{-10 \sin 5x \cos 5x}{-10 \sin x \cos x} = \frac{5 \cos^2 5x - 5 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x \mapsto 5 \end{aligned}$$

(1.13)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} &= -2 \\ \Rightarrow \frac{(x^x \ln x + x^x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} &\Rightarrow \frac{(x^x \ln x + x^x) \ln x + \frac{x^x}{x} + x^x \ln x + x^x}{-\frac{1}{x^2}} \mapsto \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

(1.14)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x^2}}{1 - \cos x} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sin x} &\Rightarrow \frac{1}{2x \sin x + \cos x (1+x^2)} \mapsto 1 \end{aligned}$$

(1.15)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi x}{2}} &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{x^2} \cdot \frac{\cos \pi x - 1}{\pi} &\Rightarrow -\frac{\pi \sin \pi x}{2x} \Rightarrow -\frac{\pi \cos \pi x}{2} \mapsto \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(1.16)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\ln(2+x^3)} &= \frac{5}{3} \\ \Rightarrow \frac{5x^4}{1+x^5} \cdot \frac{2+x^3}{3x^2} &= \frac{10x^2 + 5x^5}{3+3x^5} \Rightarrow \frac{20x + 25x^4}{15x^4} = \frac{4x + 5x^4}{3x^4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4 + 20x^3}{12x^3} &\Rightarrow \frac{60x^2}{36x^2} = \frac{5}{3} \mapsto \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2 FORME INDETERMINATE $0 \cdot \infty, \infty \cdot 0$

Trasformare $f(x)g(x)$ in $\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ oppure $\frac{g(x)}{f^{-1}(x)}$ per ottenere forme del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

(2.1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x} = a$$

$$= \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{a \cos \frac{a}{x}}{x^2} \cdot -x^2 \mapsto a$$

(2.2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{1-x}{\tan \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow \frac{-1}{\cos \pi x - 1} = \frac{-\cos \pi x + 1}{\pi} \mapsto \frac{2}{\pi}$$

(2.3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cot x = 1$$

$$= \frac{\arcsin x}{\cot x} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \mapsto 1$$

(2.4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1) = 0$$

$$= \frac{\ln(x-1)}{\ln x} \Rightarrow \frac{-x \ln^2 x}{x-1} \Rightarrow \ln^2 x + 2 \ln x \mapsto 0$$

(2.5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$= \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{-1}{x^2}} = -\frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow \frac{2x}{-2x} \mapsto -1$$

3 FORME INDETERMINATE 1^∞ , 0^∞ , ∞^∞

Poichè $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)}}$ si applichino le opportune trasformazioni algebriche al logaritmo in modo da ricondursi ad una forma indeterminata fondamentale e passare quindi al limite.

(3.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2} \Rightarrow \frac{3 \cdot (-2 \tan 2x)}{2x}$$

A questo punto disporremo del limite notevole $\frac{\tan x}{x} = 1$, ma poichè la forma è ancora

indeterminata mostriamo come applicando ancora una volta il teorema di L'Hopital essa venga rimossa

$$\Rightarrow -6 \cdot \frac{2}{2 \cos^2 2x} \mapsto -6$$

(3.2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \mapsto 0$$

(3.3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$$

$$\ln x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\ln x}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{-x} \mapsto -1$$

(3.4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

$$\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \mapsto 0$$

(3.5)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

$$\ln (\sin x)^{\tan x} = \tan x (\sin x) \mapsto 0$$

4 FORMA INDETERMINATA $\infty - \infty$

Si trasforma $f(x) - g(x)$ in $f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$ e si applica il teorema di L'Hopital al

rapporto. Se il limite di tale rapporto è 1 si incorre nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$ e pertanto si può procedere come visto in precedenza. Altrimenti la forma indeterminata è rimossa e si può direttamente passare al limite.

(4.1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) &= -1 \\ &= \frac{x}{\cot x} \left[1 - \frac{\pi \cot x}{2x \cos x} \right]; \quad \frac{\pi \cot x}{2x \cos x} \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{\sin^2 x}}{2 \cos x - 2x \sin x} \mapsto 1 \\ \frac{1 - \frac{\pi \cot x}{2x \cos x}}{\frac{\cot x}{x}} &\Rightarrow \frac{\frac{\pi \cos x}{2x \sin^2 x} - \frac{\pi}{2x^2 \sin x}}{-\frac{\cot x}{x^2} - \frac{1}{x \sin^2 x}} \mapsto -1 \end{aligned}$$

(4.2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2}$$

In questo caso conviene effettuare dei passaggi algebrici ponendo $y = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} &= x^2 \left(\frac{1}{x} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin \frac{1}{x} \right) = \frac{y \cos \sqrt{y} - \sin y}{y^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\cos \sqrt{y} - \frac{y \sin \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} - \cos y}{2y} = \frac{\cos \sqrt{y} - \cos y}{2y} \Rightarrow \frac{\frac{\sin \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} + \sin y}{2} \mapsto -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Quest'ultimo esempio dimostra egregiamente come sia sempre conveniente essere *flessibili* nell'individuazione del metodo più adatto alla rimozione della forma indeterminata.

Infatti, se si volesse applicare ciecamente il metodo proposto all'inizio del paragrafo per questa forma di indeterminazione, si andrebbe incontro ad un processo iterativo di derivazione pesantissimo.

Provare per credere.

5 ALTRI LIMITI

(5.1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-1} - 4^{x+1}}{3^x} = -\infty$$

Il limite si presenta sotto doppia forma indeterminata $\frac{\infty - \infty}{\infty}$.

Applichiamo il teorema di L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-1} - 4^{x+1}}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(2^{x-1} - 4^{x+1})}{D(3^x)}$$

quindi calcoliamo le derivate

$$\frac{D(2^{x-1} - 4^{x+1})}{D(3^x)} = \frac{\frac{\ln(2)2^x}{2} - 8\ln(2)4^x}{\ln(3)3^x} = \frac{\ln(2)}{2\ln(3)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{8\ln(2)}{\ln(3)} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

e poi passiamo al limite ottenendo la forma determinata

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-1} - 4^{x+1}}{3^x} = 0 - \infty = -\infty$$

■

Leonardo Calconi
leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math