

LIMITI CON LA FORMULA DI TAYLOR

Un metodo di calcolo alternativo al teorema di L'Hopital

di Leonardo Calconi

Publicato il 20.05.2007

Prima revisione: 21/01/2009

Quando un limite si presenta sotto una forma indeterminata che non è semplice rimuovere con trasformazioni algebriche, ci si può servire del teorema di L'Hopital.

Ma questo metodo, quando applicabile, può riservare delle difficoltà nell'iterazione del processo di derivazione che può divenire lungo e pesante.

Si può allora utilizzare la formula di Taylor ed in tal caso il lavoro da fare è quello di scomporre l'espressione per la quale il passaggio al limite conduce alla forma indeterminata, in uno o più polinomi di Taylor con resto di Peano. Fatto ciò il problema sarà ricondotto a semplificazioni ed operazioni algebriche da eseguire sui resti espressi come *o piccolo*.

Naturalmente questa scelta è sensata se si tratta di applicare polinomi di Taylor notevoli di cui si conosce lo sviluppo. Inoltre è bene essere certi che si tratti della scelta giusta, per non complicare un lavoro altrimenti risolvibile con la massima semplicità. Si veda a questo proposito l'es. (1.5).

In buona sostanza, più che parlare della formula di Taylor come "sistema di" (rimozione delle forme indeterminate), si può parlare di "applicazione alla".

Tralasciando gli argomenti "Formula di Taylor" e "Teorema di L'Hopital" sui quali è disponibile del materiale all'indirizzo www.4dmatrix.it/math, vediamo telegraficamente alcuni cenni sull'algebra di 'o piccolo'.

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(g(x)^a)}{g(x)^a} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^a)}{x^a} = 0$$

1. $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$
2. $o(o(g(x)^a)) = o(g(x)^a)$
3. $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$
4. $g(x)^a \cdot o(g(x)^b) = o(g(x)^{a+b})$
5. $o(cg(x)) = o(g(x)), c \neq 0$
6. $o(f(x)^a) - o(f(x)^a) = o(f(x)^a)$
7. $o(f(x)^a) \cdot o(f(x)^b) = o(f(x)^{a+b})$
8. $o(g(x)^a + o(g(x)^a)) = o(g(x)^a)$

Poichè, come detto, si dovranno sviluppare delle funzioni in polinomi di Taylor con resti, sarà buona cosa avere dimestichezza con le forme notevoli di tali polinomi (come vedremo, si tratterà quasi sempre di polinomi di Maclaurin) per ciascuno dei quali si dovrà disporre della forma del corrispondente *o piccolo*.

Nell'ultima pagina sono riportati gli sviluppi più comuni.

Notazioni

\Rightarrow Sviluppo in polinomi di Taylor o applicazione del teorema di L'Hopital

\mapsto Passaggio al limite

ESERCIZI

(1.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) = -\frac{1}{6}$$

La forma indeterminata con la quale si ha a che fare è del tipo $\infty - \infty$ per la quale potremmo utilizzare il teorema di L'Hopital. Eseguiamo il calcolo dapprima con questo metodo.

H) Operiamo una prima trasformazione algebrica:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{\frac{1}{x \sin x}}{\frac{1}{x^2}} \right] = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{x}{\sin x} \right]$$

Una prima applicazione del teorema ci dice che

$$\frac{x}{\sin x} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \mapsto 1$$

E' quindi evidente che dopo la trasformazione la forma indeterminata sarà del tipo $\infty \cdot 0$ per la quale possiamo ricorrere ad un'ulteriore trasformazione algebrica:

$$\frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{x}{\sin x} \right] = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$

dalla quale con tre applicazioni del teorema si giunge al limite cercato:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} &\Rightarrow \frac{\cos x - 1}{2x \sin x + x^2 \cos x} \Rightarrow \frac{-\sin x}{2 \sin x + 4 \cos x - x^2 \sin x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-\cos x}{6 \cos x - 4x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x} \mapsto -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

T) Calcoliamo ora lo stesso limite utilizzando il polinomio di Taylor per la funzione $\sin x$ con centro $x_0 = 0$, $n = 1$ e relativo resto di Peano.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)}$$

Utilizzando la proprietà 4 e semplificando otteniamo

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)} = \frac{-\frac{1}{6} + x \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \frac{o(x^6)}{x^6}} \end{aligned}$$

da cui, tenendo presente la definizione di *o piccolo*, il limite cercato è immediato.

(1.2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a, \quad a \neq 0$$

$$\frac{\ln(1+ax)}{x} \Rightarrow \frac{ax + o(ax)}{x} = a + \frac{o(x)}{x} \mapsto a$$

(1.3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arctan x} = 1$$

$$\frac{\sin x}{\arctan x} \Rightarrow \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 - \frac{x^2}{3} + x^3 \frac{o(x^4)}{x^4}} \mapsto 1$$

(1.4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = -1$$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x) - x}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \frac{-\frac{x}{2} + \frac{o(x)}{x}}{\frac{x}{2} + \frac{o(x^3)}{x}} \mapsto -1$$

(1.5)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$$

Vediamo ancora un esempio sulla scelta del metodo più opportuno di rimozione della forma indeterminata.

H) L'applicazione del teorema di L'Hopital è elementare perchè è sufficiente un solo processo di derivazione elementare e può essere eseguita a mente:

$$\frac{\ln x}{x^2 + x - 2} \Rightarrow \frac{1/x}{2x+1} \mapsto \frac{1}{3}, \quad \frac{\cos x}{x - \pi/2} \Rightarrow -\sin x \mapsto -1$$

T) L'applicazione della formula di Taylor è ancora semplice ma più sottile. Infatti è necessario sviluppare $\ln x$ con un polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ per $n = 1$ e poi semplificare:

$$\frac{\ln x}{x^2 + x - 2} \Rightarrow \frac{(x-1) + o(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1 + (x-1) \cdot o(x-1)/(x-1)}{(x+2)} \mapsto \frac{1}{3}$$

Lo sviluppo completo per $x_0 = 1$ del polinomio di Taylor per la funzione logaritmo è:

$$0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

(1.6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$$

$$(\cos x)^{-1/x^2} = e^{-(\ln \cos x)/x^2}$$

$$\ln \cos x \Rightarrow \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$$

(1.7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = 1$$

$$\frac{\cosh x - \cos x}{x^2} \Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + 2o(x^3)}{x^2} = 1 + 2x \frac{o(x^3)}{x^3} \mapsto 1$$

(1.8)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x} = 1$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x} \Rightarrow \frac{1 - (1 - x^2) + o(x^3)}{x \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^{10}) \right)} = \frac{1 + x \cdot \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{x^3}{3} + x^{10} \cdot \frac{o(x^{10})}{x^{10}}} \mapsto 1$$

(1.9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = -2$$

$$\frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = \frac{12x + 64x^3 - 12x - 4x^3 + 2o(x^{10})}{12x - 32x^3 - 12x + 2x^3 + 2o(x^2)} \mapsto -2$$

(1.10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$\frac{a^x - 1}{b^x - 1} \Rightarrow \frac{1 + x \ln a - 1}{1 + x \ln b - 1} \mapsto \frac{\ln a}{\ln b}$$

(1.11)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

Normalmente per rimuovere una forma indeterminata è sufficiente eseguire uno sviluppo di Taylor per $n = 1$. Ma in questo esercizio è evidente che tale sviluppo porterebbe alla forma indeterminata $\infty - \infty$. Pertanto svilupperemo la funzione esponenziale per $n = 2$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + \frac{x^3}{2} + x \cdot o(x^2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{x}{2} + x \cdot \frac{o(x^2)}{x^2}} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

SVILUPPI DI FUNZIONI NOTEVOLI

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2} x^2 + \binom{a}{3} x^3 + \dots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{7x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots + o(x^{10})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + o(x^n)$$

Leonardo Calconi leo@4dmatrix.it

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math