

**LA PERPENDICOLARITA'**  
**di Leonardo Calconi**  
*Publicato il 04.04.2006*  
*Prima revisione del 30.11.2009*

La condizione di perpendicolarità è parte integrante della nostra vita, per tutto ciò che questa frase può significare.

- Un oggetto lasciato cadere viaggia verso il suolo con una traiettoria ad esso perpendicolare.
- Noi camminiamo in posizione eretta perpendicolare al suolo.
- L'angolo retto è in genere la soluzione migliore per la gestione dello spazio: edifici, mobili, imballaggi, superfici di proiezione.
- Le superfici vengono ripartite in parti eguali con l'uso degli angoli retti creati da rette perpendicolari, angoli che, come ci dice Euclide col quarto postulato, sono tutti uguali.
- Col sole allo zenith gli oggetti non proiettano ombre perchè i raggi solari sono perpendicolari al suolo.
- Le matrici sono griglie con righe e colonne tra di loro perpendicolari.
- La condizione di simmetria con la quale abbiamo a che fare ovunque, a cominciare dal nostro corpo di esseri viventi, è strettamente correlata a quella di perpendicolarità.

Eccetera per mille altri esempi.

Ma in che modo possiamo individuare in una formulazione astratta questa condizione che vincola pesantemente la nostra esistenza nell'infinitesimo sottoinsieme T del sistema universo U cui apparteniamo ?

### **EQUAZIONE IMPLICITA DELLA RETTA**

E' possibile individuare una condizione di **normalità** (e la sua "inversa" di **parallelismo**) nell'equazione implicita di una retta nel piano cartesiano del tipo

$$ax + by + c = 0$$

equazione che, come abbiamo illustrato in un altro nostro lavoro contiene anche un'altra condizione esistenziale nel sottoinsieme T: la **continuità**.

D'ora in avanti adotteremo la seguente terminologia:

- Una retta perpendicolare ad un'altra è ad essa **normale**.
- Due rette perpendicolari tra di loro sono **normali** tra di loro.
- La condizione di perpendicolarità è la condizione di **normalità**.

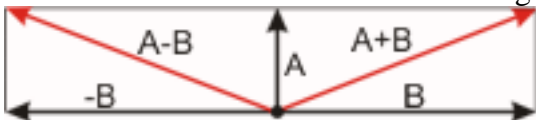
### **DISCUSSIONE SUI VETTORI APPLICATI**

Iniziamo stabilendo la condizione di normalità tra due rette nel piano cartesiano per mezzo di due vettori A e B applicati nell'origine e aventi la stessa direzione delle rette.

Se i due vettori sono tra di loro normali si ha

$$|A + B| = |A - B|$$

ovvero il modulo del vettore somma è uguale al modulo del vettore differenza.



Ricordando che il modulo di un vettore è

$$|N| = \sqrt{NN}$$

Si ha

$$\sqrt{(A+B)(A+B)} = \sqrt{(A-B)(A-B)}$$

da cui elevando al quadrato e sviluppando il calcolo si ottiene

$$4AB = 0 \text{ ovvero}$$

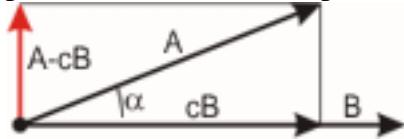
$$AB = 0$$

Ricordando che il prodotto di due vettori è un **numero**, qual è il significato del numero

$$c = \mathbf{AB}$$

che nel nostro caso è uguale a zero ?

Se due vettori A e B hanno direzione qualunque e, in prima istanza, non sono tra di loro normali, possiamo considerare la proiezione  $cB$  di A su B con  $c \in \mathbb{R}$



In tal caso il vettore differenza  $A-cB$  sarà normale a B e si avrà

$$\mathbf{B(A - cB)} = \mathbf{0}$$

ovvero

$$c = \frac{AB}{BB}$$

che, nel caso B sia un vettore unità, si riduce alla forma semplificata

$$c = AB.$$

Ora, con un semplice calcolo trigonometrico, abbiamo

$$c|B| = |A|\cos\alpha \text{ e } c = \frac{|A|\cos\alpha}{|B|} = \frac{AB}{BB}$$

da cui si ha

$$\cos\alpha = \frac{AB|B|}{BB|A|} = \frac{AB|B|}{|B|^2|A|} = \frac{AB}{|A||B|}$$

Ricordando che per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$(AB)^2 \leq (AA)(BB) \leq |A|^2|B|^2$$

si ha anche

$$(AB) \leq |A||B|$$

Allora è evidente che deve essere

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

ovvero

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

Quindi il nostro numero  $c$ , attribuendo significato al prodotto di due vettori, rappresenta l'indicatore della loro eventuale condizione di normalità.

Esprimendo questa condizione con una variabile booleana  $\kappa$ :

- se  $\alpha=0^\circ$   $c = \frac{|A|}{|B|}$  ovvero  $|A| = c|B|$ , i due vettori coincidono ed hanno stesso verso  $\kappa = \text{falso}$
- se  $\alpha=90^\circ$   $c = 0$ , i due vettori sono distinti  $\kappa = \text{vero}$
- se  $\alpha=180^\circ$   $c = \frac{-|A|}{|B|}$ , i due vettori coincidono e hanno verso opposto  $\kappa = \text{falso}$
- se  $\alpha=270^\circ$   $c = 0$ , i due vettori sono distinti  $\kappa = \text{vero}$

## EQUAZIONE IMPLICITA DELLA RETTA

Tornando alla condizione di normalità espressa da

$$B(A - cB) = 0$$

osserviamo che A e B sono due vettori applicati nell'origine e quindi sono definiti ciascuno da una n-upla che rappresenta le coordinate dell'estremità libera del vettore, ovvero un punto.

Cambiamo simboli ponendo  $N(X - P) = 0$  dove

- X (x,y) è un punto qualsiasi del piano
- N (a,b) è un vettore non nullo applicato nell'origine
- P (u,v) è il punto per il quale passa una retta normale ad N

Essendo  $NX = PN$  sarà  $ax + by = ua + vb$ , da cui ponendo  $ua + vb = -c$  si ha

$$ax + by + c = 0$$

ovvero l'equazione implicita della retta passante per X e P e normale ad N.

**In questa equazione quindi i coefficienti a,b definiscono il vettore N normale alla retta data e a qualsiasi altra retta i cui coefficienti a',b' identifichino un vettore N'=N.**

Se la retta passa per l'origine,  $\frac{c}{a}=0$ , si ha la condizione di normalità semplificata

$$ua + vb = 0 = PN$$

in quanto ora P rappresenta un vettore coincidente con la retta e applicato nell'origine.

## NORMALITA' DI DUE RETTE NEL PIANO

Date due rette nel piano

$$a) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

esse sono normali tra di loro se:

- il sistema a) formato dalle loro equazioni ha una soluzione
- è  $aa' + bb' = 0$

La condizione di normalità  $aa' + bb' = 0$  è immediatamente verificata considerando le due rette come passanti per l'origine con:

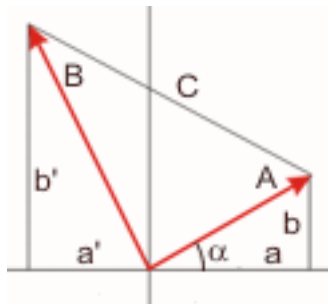
$$ax + by = 0$$

$$a'x + b'y = 0$$

I due vettori A (a,b) e B(a',b') appartenenti alle rette e applicati nell'origine sono normali tra di loro e quindi per il teorema di Pitagora si ha

$$C^2 = A^2 + B^2$$

dove C è la distanza tra i punti A e B



Quindi

$$(a'-a)^2 + (b'-b)^2 = (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2)$$

cioè, svolgendo il calcolo,

$$aa' + bb' = 0$$

il cui significato risulta chiaro scrivendo il sistema a) con equazioni in forma esplicita

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$

e ricordando che i coefficienti angolari delle due rette normali sono espressi da

$$m = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad m' = -\frac{a'}{b'} = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Pertanto si ha

$$m = -\frac{1}{m'} \text{ e quindi } -aa' = bb'.$$

Dunque i coefficienti (a, b) e (a', b') rappresentano nelle due equazioni del sistema a) due vettori applicati nell'origine tra di loro normali e di conseguenza le due rette del sistema a) sono tra di loro normali.

Per il 5° postulato di Euclide la verifica che il sistema a) abbia una ed una sola soluzione è a questo punto ridondante. La eseguiremo in seguito nella discussione sul parallelismo..

## LA SIMMETRIA

Dati tre vettori applicati nell'origine:

- A
- B con stessa direzione di A e verso opposto ad A
- C normale ad A e B

si dimostra immediatamente col teorema di Pitagora che i punti A(a,b) e B(a',b') sono equidistanti dal punto C(a'',b'').

Ciò permette di affermare che date due rette r, r' tra di loro normali, due punti P<sub>1</sub>=(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) e P<sub>2</sub>=(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>) su r equidistanti dal punto d'intersezione con r' sono equidistanti da un unico punto P=(x,y) su r'.

Più in generale, dati nel piano due punti distinti P<sub>1</sub> (x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) e P<sub>2</sub>(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>), il luogo H dei punti del piano equidistanti da P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> è una retta normale al segmento P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>, passante per il suo punto medio e detta asse del segmento.

Anche questa dimostrazione è elementare col teorema di Pitagora.

Più elegante è quella che si basa sulla distanza di due punti.

Essendo P<sub>1</sub>P = P<sub>2</sub>P sarà anche

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

eguaglianza che sviluppata porta all'equazione

$$a) \quad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

cioè all'equazione implicita della retta passante P e per il punto medio  $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  di

P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>, ovvero il luogo geometrico H.

Poichè la retta per P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> ha equazione

$$b) \quad (y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0$$

la condizione di normalità tra P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> e PM è verificata.

Ci sono dei dubbi ?

Poniamo in a)

$$a = 2(x_2 - x_1)$$

$$b = 2(y_2 - y_1)$$

$$c = (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)$$

e in b)

$$a' = y_2 - y_1$$

$$b' = x_1 - x_2$$

$$c' = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

ed ecco che la condizione generale di normalità

$$aa' + bb' = 0$$

è verificata.

## E ADESSO IL PARALLELISMO

Perché due rette **non** siano parallele il sistema che le rappresenta deve avere un'unica soluzione e tale soluzione rappresenta l'unico punto del piano per il quale le due rette hanno le stesse coordinate, ovvero il loro punto d'intersezione.

Consideriamo le due matrici A e A' rispettivamente incompleta e completa del sistema a):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

In forza del teorema di Rouchè-Capelli perché il sistema abbia una soluzione deve essere

$$r(A) = r(B) = 2$$

ovvero le due matrici devono avere lo stesso rango e tale rango deve essere uguale al numero delle incognite del sistema.

Passando al determinante dovrà essere  $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \neq 0$  con  $(a, b) \neq (0, 0)$  e  $(a', b') \neq 0$

il che significa che due vettori  $A = (a, b)$  e  $B = (a', b')$  applicati nell'origine sono L.I. ovvero non allineati.

Tali vettori:

- generano uno spazio vettoriale  $v^2$  poichè ciascuno è combinazione lineare dei due
- ne sono un sottoinsieme massimale di elementi L.I.
- ne formano una base essendo generatori e L.I.
- ne definiscono, con il loro numero, l'ordine: 2

Sempre col teorema di Rouchè-Capelli possiamo verificare la condizione di parallelismo di n rette distinte.

Infatti ponendo  $n = 3$  e scrivendo il sistema

$$b) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

e quindi le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

perchè le rette rappresentate dalle tre equazioni siano parallele due a due i minori di ordine 2 di A dovranno essere tutti nulli e dovendo essere  $r(A) \geq 1$  sarà necessariamente  $r(A) = 1$ .

Passando al determinante della matrice completa sarà

$$\det B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

da cui  $r(B) \leq 2$ ; ma dovendo anche essere  $r(B) \geq 2$  perchè le tre rette sono distinte, sarà  $r(B) = 2 \neq r(A)$ ; dunque il sistema b) non è compatibile.

## ALCUNE APPLICAZIONI

nelle quali la fantasia di ognuno potrà visualizzare strutture importanti di T vincolate alla condizione di normalità.

Noi vi diamo un input in tal senso a commento di ciascuna di esse, assolutamente informale dal punto di vista matematico. Voi chiudete gli occhi e trovate altre applicazioni e altre strutture.

### 1) URBANISTICA

Consideriamo l'insieme N nel piano delle rette parallele di equazioni

$$ax + by + c_n = 0$$

e l'insieme N' nel piano delle rette parallele di equazioni

$$a'x + b'y + c'_n = 0$$

L'applicazione  $\varphi: N \rightarrow N'$  per la quale sia

$$aa' + bb' = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{c_n}{a} = -\frac{c'_n}{a'} = q$$

è biiettiva e stabilisce un rapporto biunivoco tra le rette dei due insiemi, normali tra di loro e con la stessa ordinata all'origine.

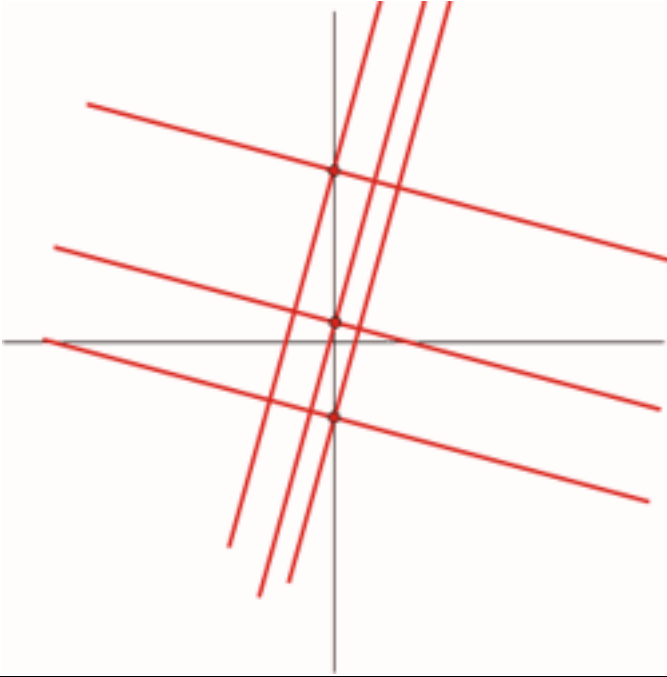
M è il sottoinsieme del prodotto cartesiano  $N \times N'$  formato dalle coppie di rette normali tra di loro con punto d'intersezione sull'asse delle y di ordinata q.

Come si modifica il "passo della griglia" ?

Variando la comune ordinata all'origine di una coppia di rette:  $q' = q \pm k$

E il suo orientamento ?

Con una rotazione rigida dell'insieme M eseguita variando il coefficiente angolare di una qualsiasi delle rette:  $m' = m \pm h$ .



---

L'insieme M è quello che un architetto chiamerebbe “maglia scozzese”, ovvero una griglia di progettazione a “passo” variabile formata da rette tra di loro normali.

Riga, squadra, tecnigrafo, fogli di carta, tavolo da disegno, monitor e Autocad sono tutti strumenti basati sull'angolo retto che pur non impedendo al progettista di disegnare forme qualsiasi ne condizionano la creatività e il modo di pensare.

La struttura urbanistica di Torino è un qualcosa di molto vicino ad una maglia scozzese nella quale tra **rette normali** hanno vissuto, vivono e vivranno milioni di persone.



## 2) TECNOLOGIA

Sia  $S$  l'insieme nel piano delle rette di equazioni  
 $ax + by + c = 0$   
 tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + ux + vy + z = 0, \text{ centro } d = \left(-\frac{u}{2}, -\frac{v}{2}\right) \text{ e raggio } r = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 - 4uz}}{2}$$

e  $S'$  l'insieme nel piano delle rette di equazioni  
 $a'x + b'y + c' = 0$   
 passanti per il centro della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + u'x + v'y + z' = 0, \text{ centro } d' = \left(-\frac{u'}{2}, -\frac{v'}{2}\right) \text{ e raggio } r' = \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2 - 4u'z'}}{2}$$

L'applicazione  $\varphi : S \rightarrow S'$  per la quale sia  
 $aa' + bb' = 0, d = d', r = r'$

sembra stabilire a prima vista una relazione biunivoca tra le rette dei due insiemi, normali tra di loro e con il punto sulla circonferenza di uguali coordinate.

Ma non è così perchè l'applicazione non è iniettiva.

Infatti secondo  $\varphi$  due rette distinte di  $S$  hanno come immagine in  $S'$  un'unica retta normale ad ambedue e viceversa una retta in  $S'$  è immagine di due rette distinte in  $S$  ambedue normali ad essa. Per ottenere la biiettività di  $\varphi$  è necessario imporre l'ulteriore vincolo che sia

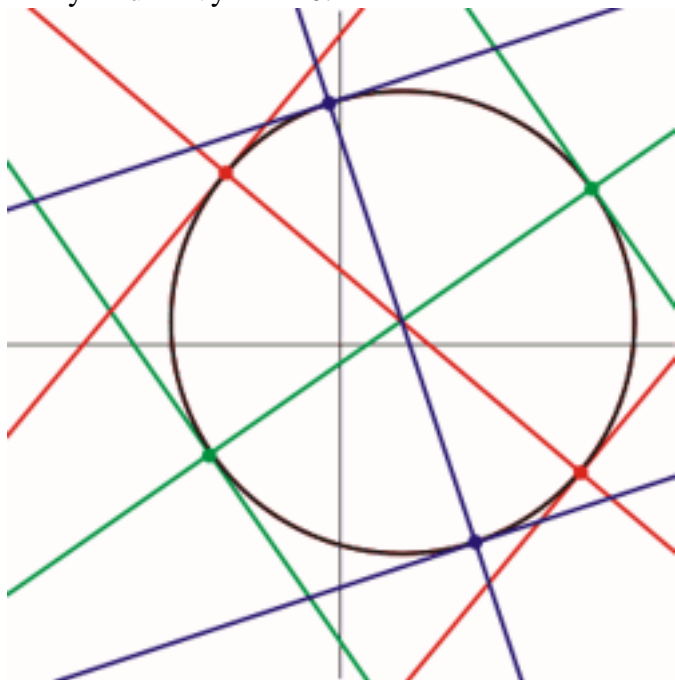
$P(x,y)=P'(x',y')$  dove  $P$  è il punto di tangenza della retta in  $S$  e  $P'$  il punto d'intersezione della retta in  $S'$  con le rispettive circonferenze.

Allora  $T$  sarà il sottoinsieme del prodotto cartesiano  $S \times S'$  formato dalle coppie di rette normali tra loro che hanno il punto d'intersezione sulla circonferenza e le cui coordinate sono date dalla soluzione del sistema

$$a) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

L'insieme  $W$  delle soluzioni degli infiniti sistemi a) è l'insieme delle  $n$ -uple che soddisfano l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ux + vy + z = 0.$$



Ora trasportiamo tutto nello spazio trasformando circonferenze in sfere, rette tangenti in piani tangenti e rette passanti per il centro della sfera in...beh quelle rimangono tali.

Avete un GPS nella vostra vettura ?

Il principio di funzionamento del GPS si basa sulla "triangolazione" della posizione di 24+3 satelliti che inviano una serie di sequenze digitali, sequenze che però non vengono utilizzate per calcolare angoli, ma distanze. Tali satelliti ruotano attorno al pianeta due volte al giorno a 20 km. di altezza su orbite tali che ogni punto sulla terra è "visto" almeno da quattro satelliti contemporaneamente.



Ogni satellite ha al suo interno un orologio al Cesio con precisione valutabile in 1 secondo ogni milione di anni, ed è "sincronizzato" col vostro ricevitore GPS che trasforma il tempo impiegato a ricevere il segnale in distanza dal satellite che lo ha emesso.

Per fare il punto bidimensionale il GPS deve "agganciare" almeno tre satelliti. Calcolata la sua distanza da ciascuno di essi, il vostro strumento elabora un algoritmo detto trilaterazione che costruisce nello spazio tre sfere con centri i tre satelliti e raggi uguali alle tre distanze a disposizione, sfere che hanno due soli punti in comune: uno è il punto di stazionamento del GPS e l'altro quello direttamente opposto, che viene automaticamente scartato come "impossibile" (l'antenna del GPS dovrebbe trovarsi nella ionosfera...).

La posizione così ottenuta è geografica e bidimensionale (latitudine e longitudine → rette normali su spazio non euclideo...), dato che i calcoli eseguiti dal GPS non hanno tenuto conto dell'altezza sul livello del mare dell'antenna del ricevitore.

Per eliminare questa approssimazione ed ottenere una posizione spaziale e tridimensionale con l'aggiunta di tale altezza (hslm → retta normale al piano tangente nel punto di stazionamento...) è necessario agganciare almeno un quarto satellite, operazione che riduce gli errori di calcolo ad una sfera di raggio circa 50 metri. Al crescere del numero di satelliti agganciati decresce il raggio della sfera d'imprecisione grazie al controllo di ridondanza che lo strumento effettua in tempo reale sui dati ricevuti.

Stiamo parlando di sfere, piani tangenti, **rette normali**...

### 3) ARTE

Sia  $S$  l'insieme delle rette tangenti alla circonferenza  $f_a(x)$  di raggio  $r$  e centro  $d$ .

L'applicazione  $\varphi : S \rightarrow S$  per la quale sia

$$f_a'(x_n) = -\frac{1}{f_a'(x_m)}$$

è biiettiva e stabilisce una relazione biunivoca tra le rette di equazioni

$$a) \begin{cases} a_n x + b_n y + c_n = 0 \\ a_m x + b_m y + c_m = 0 \end{cases}$$

tangenti alla circonferenza nei punti  $N$  e  $M$ , normali tra di loro e che si intersecano nel punto  $X(x,y)$  soluzione del sistema a). Il sottoinsieme  $O$  delle  $n$ -uple soluzioni degli infiniti sistemi a) descrive una circonferenza  $f_b(x)$  di raggio  $r + q$  (quanto vale  $q$  ?) e centro  $d$ .

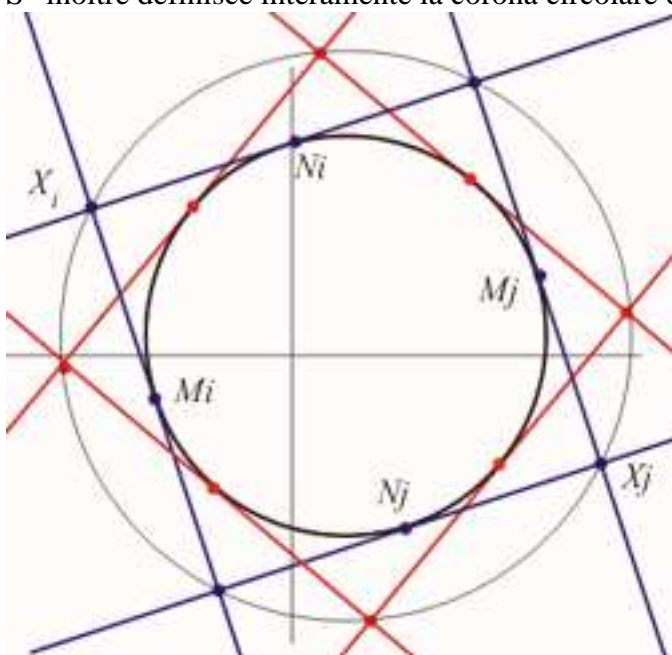
Allora se  $S'$  è il sottoinsieme del prodotto cartesiano  $S \times S$  formato dalle coppie di tali rette, consideriamo l'applicazione  $\theta : S' \rightarrow S'$  per la quale sia

$$X_i X_j = 2(r+q).$$

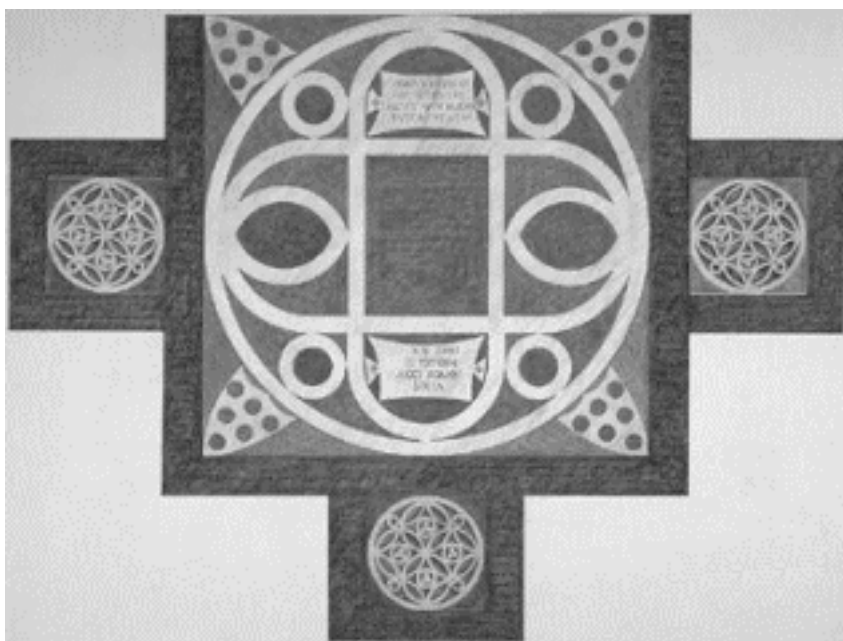
Essa è biiettiva e stabilisce una relazione biunivoca tra le coppie di rette tangenti due a due alla circonferenza  $f_a(x)$  nei punti  $N_i, M_i$  e  $N_j, M_j$  e che si intersecano nei punti  $X_i, X_j$  sulla circonferenza  $f_b(x)$ .

Il sottoinsieme  $S''$  delle quaterne di segmenti appartenenti alle coppie di rette con un estremo in  $X_i, X_j$  e il punto mediano in  $N_i, M_i$  e  $N_j, M_j$  è formato dai quadrati che circoscrivono la circonferenza  $f_a(x)$ , che sono inscritti nella circonferenza  $f_b(x)$ .

$S''$  inoltre definisce interamente la corona circolare di raggi  $r+q, r$ .



Siamo nella seconda metà del '400 e questa è la lastra tombale di Cosimo di Giovanni de' Medici nel pavimento sotto la cupola della basilica di S. Lorenzo a Firenze, disegnata probabilmente da Andrea di Francesco di Cione detto il Verrocchio.



Quadrati che inscrivono circonferenze e simmetrie: tutto ruota attorno a forme geometriche costruite con angoli retti su particolari proporzioni.

I lati del rettangolo centrale stanno tra loro nel rapporto 3:4 che consente di dividerlo in due triangoli con terna pitagorica 3, 4, 5, il noto triangolo egizio. Con l'aggiunta dei semicerchi sui suoi lati il rettangolo prende la forma del Nodo di Salomone simbolo dell'eternità. I quattro simboli negli angoli del quadrato principale con 1, 2, 3 fori stilizzano il pesce, simbolo della cristianità.

Tutta la composizione è basata sui numeri 1, 2, 3, 4, 5 sui quali è costruita la scala musicale tolemaica.

**Rette normali** creano una maglia scozzese nella quale è domiciliato l'intero pensiero rinascimentale.

**Leonardo Calconi**  
[leo@4dmatrix.it](mailto:leo@4dmatrix.it)

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: [www.4dmatrix.it/math](http://www.4dmatrix.it/math)