

LA RETTA

di Leonardo Calconi

Publicato il 16.02.2006

LA RETTA COME INSIEME CONTINUO

La retta è una delle più antiche espressioni di continuità, definita da Euclide mediante i postulati 1, 2 che affermano come:

1. da un punto P_1 sia sempre possibile tracciare una retta r che passi per un altro punto P_2
2. tale retta abbia lunghezza infinita.

La definizione di retta è:

“Insieme dei punti del piano che soddisfano un’equazione del tipo $ax + by + c = 0$ ”

Ma cosa vuol dire ?

Perché possiamo rappresentare con un’espressione letterale un luogo geometrico ?

Riflettiamo sul fatto che con la retta possiamo rappresentare l’insieme \mathbb{R} dei numeri reali, risiedendo in questa rappresentazione l’espressione della continuità.

Infatti, considerando l’applicazione $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, con P insieme dei punti sulla retta e \mathbb{R} insieme dei numeri reali, essa è iniettiva in quanto ogni p di P ha un’immagine distinta in \mathbb{R} ed è suriettiva in quanto ciascun r di \mathbb{R} è immagine di un solo elemento di P . Quindi φ è biiettiva e stabilisce un rapporto biunivoco tra gli elementi dei due insiemi e poiché l’insieme \mathbb{R} è continuo anche P è continuo.

La retta rappresenta anche gli insiemi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, anch’essi infiniti ma non continui, essendo gli insiemi \mathbb{N} dei numeri naturali e \mathbb{Z} dei numeri interi insiemi discreti, e \mathbb{Q} quello dei numeri razionali un insieme denso.

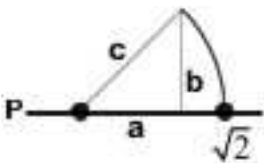
Ad esempio, un’applicazione $\theta : P \rightarrow \mathbb{Q}$ è biiettiva e quindi stabilisce un rapporto biunivoco tra gli elementi dei due insiemi ?

No, perché non è iniettiva pur essendo suriettiva.

Si dimostra infatti che $\sqrt{2}$ appartiene all’insieme P ma non all’insieme \mathbb{Q} essendo un numero irrazionale.

$$a = b = 1; a, b \in \mathbb{Q}$$

$$c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$



Ancora.

Se $c = \sqrt{2}$ è $c^2 = 2$. Se per assurdo $c \in \mathbb{Q}$ è anche $c = \frac{m}{n}$ ovvero $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = c^2 = 2$ ovvero $2n^2 = m^2$

dove m e n possono essere scelti primi tra loro in \mathbb{Q} .

Allora essendo $2n^2$ pari anche m^2 è pari e quindi possiamo porre $m = 2k$ con k intero.

Segue che $2n^2 = m^2 = 4k^2$ cioè $n^2 = 2k^2$ ovvero che anche n è pari, il che contrasta con l'ipotesi che m e n siano primi tra loro. Quindi $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$.

Concludiamo la discussione sulla corrispondenza tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti della retta e sulla loro continuità con l'**assioma di Dedekind** che afferma come dato l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e due sue sezioni A e B , per due elementi qualsiasi $a < b$, $a \in A$, $b \in B$, esiste un elemento c per cui $a \leq c \leq b$. Nel caso di $c = \sqrt{2}$, c è minore o uguale a qualsiasi numero il cui quadrato è maggiore o uguale a 2 (sezione B) e maggiore o uguale a tutti gli elementi di \mathbb{R} non appartenenti a B (sezione A).

L'aver dimostrato che l'insieme P dei punti della retta e l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali sono messi in relazione da un'applicazione di tipo φ non consente ancora di accettare un'equazione esplicita del tipo $ax + by + c = 0$ come sua rappresentazione. Manca infatti una legge che governi questa relazione, legge che dovrà essere individuata in una struttura algebrica.

DISCUSSIONE SUGLI SPAZI VETTORIALI

Se indichiamo con V^2 l'insieme dei vettori applicati nel piano, poiché in base al 5° postulato euclideo dato un vettore applicato AB esiste un solo vettore applicato OP equipollente ad AB , ne segue che fissato arbitrariamente un punto O nel piano possiamo limitarci a considerare l'insieme V_0^2 dei vettori applicati in O .

Dunque V_0^2 è definito come spazio vettoriale, e in questo spazio sono definite due operazioni:

1. di addizione tra due vettori
2. di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

Tali operazioni formano la **base algebrica** di V_0^2 costituita:

1. dalle quattro proprietà dell'addizione di due vettori:
 1. associativa: $(OP_1 + OP_2) + OP_3 = OP_1 + (OP_2 + OP_3)$
 2. vettore nullo: $OP_1 + 0 = 0 + OP_1 = OP_1$
 3. vettore contrario: $OP_1 + (-OP_1) = (-OP_1) + OP_1 = 0$
 4. commutativa: $OP_1 + OP_2 = OP_2 + OP_1$
2. e dalle quattro proprietà della moltiplicazione di un vettore per uno scalare:
 1. distributiva: $\lambda(OP_1 + OP_2) = \lambda OP_1 + \lambda OP_2$
 2. distributiva: $(\lambda + \mu) OP_1 = \lambda OP_1 + \mu OP_1$
 3. associativa: $(\lambda\mu) OP_1 = \lambda(\mu OP_1)$
 4. identità: $1 OP_1 = OP_1$

Possiamo inoltre definire in V_0^2 una **base vettoriale** costituita da due vettori OP_1 OP_2 non allineati mediante la cui combinazione lineare è possibile descrivere qualunque altro vettore:
 $OP = \lambda OP_1 + \mu OP_2$.

Ora consideriamo l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$ nel quale valgano le due operazioni di addizione tra due vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

La base algebrica di V_0^2 è la stessa di \mathbb{R}^2 che pertanto può anch'esso essere definito spazio vettoriale, essendo il primo di carattere geometrico ed il secondo di carattere numerico.

Se consideriamo ora l'applicazione $\varphi: V_0^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, essa permette di identificare V_0^2 con \mathbb{R}^2 assieme alle rispettive strutture, ovvero di definire come isomorfi i due spazi vettoriali e come isomorfismo di spazi vettoriali la loro applicazione.

Come ?

1. φ è biettiva, e quindi stabilisce una relazione biunivoca tra gli elementi dei due insiemi convertendo problemi geometrici in problemi algebrici e viceversa
2. $\varphi(OP + OP) = \varphi OP + \varphi OP$, e quindi l'immagine mediante φ della somma di due vettori in V_0^2 è uguale alla somma delle loro immagini in \mathbb{R}^2
3. $\varphi(\lambda OP) = \lambda(\varphi OP)$, e quindi l'immagine di un multiplo di un vettore di V_0^2 è uguale al multiplo del vettore di \mathbb{R}^2 con lo stesso coefficiente.

L'applicazione φ è quindi la chiave di volta per passare dall'universo geometrico di Euclide a quello astratto dell'algebra nella rappresentazione della retta mediante un'equazione implicita. Siamo autorizzati a definire un luogo geometrico mediante un'espressione letterale, dobbiamo solo dimostrare che questa espressione letterale sia proprio la nostra.

Dimostreremo che la retta nel piano è definita da un'**equazione implicita o cartesiana** del tipo:

$$ax + by + c = 0$$

o, nella sua forma esplicita

$$y = mx + p$$

dimostrando che essa è definita da un sistema di **equazioni parametriche** di primo grado del tipo:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE

Due vettori allineati si dicono linearmente dipendenti perché **non** possono essere combinati linearmente per descriverne un terzo dal momento che giacciono sulla stessa retta r passante per due punti P_1 e P_2 .

Se i due vettori non sono allineati si dicono linearmente indipendenti e la loro combinazione lineare

descrive ogni altro vettore di V_0^2 .

Se i vettori sono $P=(x,y)$, e $P_1=(x_1,y_1)$ essi sono:

linearmente indipendenti se $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ e **linearmente indipendenti** se $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Con questa premessa il modo più semplice per arrivare all'equazione implicita della retta è quello di porre il determinante

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Da cui l'equazione cartesiana della retta e da questa quella implicita come dimostrato più avanti.

Ma noi preferiamo fare un passo indietro e dimostrare con un calcolo vettoriale che ogni retta r del piano è descritta da un **sistema lineare di due equazioni parametriche di primo grado** del tipo:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

dove $P, P_1 \in r$, con $x, y, l, m, t \in \mathbb{R}$, $(l, m) \neq (0, 0)$

Data una retta r , stabiliamo su di essa due punti P_1 e P_2 e quindi un punto O del piano in prima istanza* $\notin r$.

Fissiamo quindi su r un terzo punto P e dimostriamo che P , e quindi qualunque punto del piano $P=(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$, appartiene alla retta r se x e y sono soluzione del sistema.

Definiamo i vettori PP_1 e PP_2 e quindi i loro equipollenti OP'_1, OP'_2 che, per il 5° postulato euclideo, sono unici.

Possiamo scrivere: $OP'_2 = t OP'_1$

Poiché $OP'_2 = OP - OP_1$ e $OP'_1 = OP_2 - OP_1$

Si ha $OP = OP_1 + t(OP_2 - OP_1)$

Con il parametro $t \in \mathbb{R}$

Il punto $P \in r$ è quindi descritto dal sistema

$$P = (x,y) \in r \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Da cui ponendo

$$x_2 - x_1 = l$$

$$y_2 - y_1 = m$$

Si ha il sistema di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

* Se $O \in r$ allora $P_1 = O$ e i vettori PP_1, PP_2 coincidono con i vettori OP'_1, OP'_2 .

Ponendo $t = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$1) \begin{cases} x - x_1 + x_2 - x_1 = 0 \\ y - y_1 + y_2 - y_1 = 0 \end{cases}$$

Perché il sistema 1) rappresenti un punto della retta del piano deve essere compatibile ed avere infinite soluzioni.

Ma poiché un sistema omogeneo

- è sempre compatibile
- ha sempre un'autosoluzione
- ha una soluzione banale
- ha quindi infinite soluzioni

il sistema 1) ha anche infinite soluzioni e se ha infinite soluzioni il suo determinante è uguale a zero.

Detta A la matrice incompleta del sistema e A^T la sua trasposta si ha:

$$A = \begin{pmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ perchè } A \text{ è simmetrica.}$$

$$\text{Passando al determinante } |A| = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Siamo alla fine del percorso.

EQUAZIONE IMPLICITA

Posto

$$a = y_2 - y_1$$

$$b = x_1 - x_2$$

$$c = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

Si ha

$$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

EQUAZIONE ESPLICITA

$$\text{Ponendo } m = -\frac{a}{b} \text{ e } q = -\frac{c}{b}$$

Si ha

$$\mathbf{y = mx + q}$$

ASPETTI GEOMETRICI DELLE EQUAZIONI DELLA RETTA

Il **coefficiente angolare** definisce "l'inclinazione" della retta nel piano cartesiano.

Il **termine noto** o **ordinata all'origine** definisce la sua intersezione con l'asse delle y.

Nelle equazioni esplicita ed implicita sono definiti da:

$$m = -\frac{a}{b} \text{ coefficiente angolare}$$

$$q = -\frac{c}{b} \text{ termine noto}$$

- per $m = 0$ ($a = 0$) la retta è parallela all'asse x
- per $m = \infty$ ($b = 0$) la retta è parallela all'asse y
- per $m = 1$ la retta ha un'inclinazione di 45°
- per $q = 0$ ($c = 0$) la retta passa per l'origine
- per $m = q = 0$ ($a = c = 0$) la retta coincide con l'asse delle x

Nelle equazioni cartesiane sono definiti da:

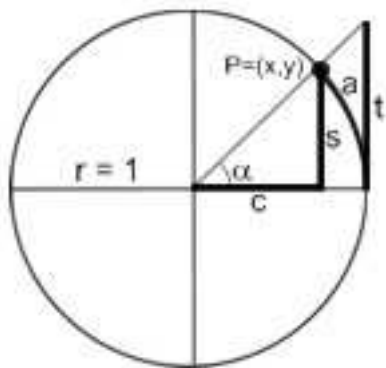
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ coefficiente angolare}$$

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \text{ termine noto}$$

- per $y_1 = y_2$, $m = 0 = \text{tg}90^\circ$, la retta è parallela all'asse x
- per $x_1 = x_2$, $m = \infty = \text{tg}180^\circ$, la retta è parallela all'asse y
- per $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, la retta passa per l'origine ed è inclinata di 45°
- per $x_1 = y_1 = 0$, $q = 0$, la retta passa per l'origine

Per il **coefficiente angolare** valgono queste equivalenze:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ dove } \alpha \text{ è l'angolo di cui deve ruotare l'asse x per sovrapporsi ad r.}$$



$$s = \text{sen } \alpha$$

$$c = \text{cos } \alpha$$

$$\frac{t}{1} = \frac{s}{c} = \frac{\text{tg } \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad t = \text{tg } \alpha$$

$a = \text{arco relativo ad } \alpha = \text{valore in radianti di } \alpha$

Infatti, ponendo il termine noto uguale a zero e facendo quindi passare la retta per l'origine

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

il coefficiente angolare sarà rappresentato dal rapporto tra le coordite di un punto qualsiasi su di essa:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

mentre per una generica retta non passante per l'origine si dovrà considerare il rapporto tra le differenze delle coordinate di due punti qualsiasi su di essa:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

DUE RETTE NEL PIANO

Sono definite dal sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Rette non parallele

Per il 5° postulato di Euclide due rette non parallele devono incontrarsi in un punto.

Perché le due rette non siano parallele il sistema che le rappresenta deve avere un'unica soluzione e tale soluzione rappresenta l'unico punto del piano per il quale le due rette hanno le stesse coordinate, ovvero il loro punto d'intersezione.

Consideriamo le due matrici A e A' rispettivamente incompleta e completa del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

In forza del teorema di Rouchè-Capelli perché il sistema abbia una soluzione deve essere

$$r(A) = r(B) = 2$$

ovvero le due matrici devono avere lo stesso rango e tale rango deve essere uguale al numero delle incognite del sistema.

Passando al determinante dovrà essere $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \neq 0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ e $(a',b') \neq 0$

il che significa che i due vettori $u = (a,b)$ e $v = (a',b')$ sono linearmente indipendenti ovvero non allineati.

Rette parallele o coincidenti

Se il rango del sistema è inferiore al numero delle incognite esso ammette infinite soluzioni ed è $\det A = 0$.

I due vettori u, v sono linearmente dipendenti.

Leonardo Calconi
<mailto:leo@4dmatrix.it>

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math