

# CRITERI DI CONVERGENZA

di serie a termini reali

di Leonardo Calconi

30.06.2008

Come suggerisce il titolo, l'argomento di questi appunti è costituito dai criteri di convergenza e dai teoremi sul carattere delle serie a termini reali.

Per comodità di studio ho riunito sotto il termine di "criteri" sia i criteri di convergenza veri e propri che i teoremi sul carattere delle serie. Ad ogni criterio ho dato, sempre per comodità di studio, un nome che può essere quello comunemente adottato dalla maggior parte degli autori (es. *criterio di D'Alembert*) oppure un nome che serve da identificativo facilmente memorizzabile ma che non è riscontrabile nei testi di calcolo (es. *criterio del resto*).

I criteri che ho preso in considerazione non sono *tutti* i criteri e teoremi ma solo i *principali* e per essi ho riportato la dimostrazione che conosco.

Questo capitolo è seguito da una seconda parte destinata telegraficamente alle nozioni elementari e alle definizioni. Essa può tranquillamente essere ignorata da chi si muove agilmente nell'argomento - ed è questo il motivo per il quale non l'ho posta all'inizio del lavoro - ma se devono poi sorgere incomprensioni su termini e concetti è meglio leggerla e criticarla come banale piuttosto che cominciare ad inciampare sin dai primi paragrafi.

Nella terza parte ho scritto alcune cose sulle serie armoniche che spero troverete interessanti e nella quarta ho descritto brevemente altre serie notevoli.

Esiste infine un'appendice nella quale ho riunito alcune dimostrazioni e calcoli marginali che avrebbero inutilmente diluito i paragrafi ai quali si riferiscono.

## Sommario

### 1. Principali criteri di convergenza

#### 1.1. Criteri generali

- 1.1.1. Criterio necessario e sufficiente di convergenza
- 1.1.2. Criterio necessario di convergenza
- 1.1.3. Criterio della combinazione lineare
- 1.1.4. Criterio del resto
- 1.1.5. Criterio della proprietà associativa
- 1.1.6. Criterio della somma e della differenza

#### 1.2. Criteri per le serie a termini di segno costante

- 1.2.1. Criterio di non indeterminatezza
- 1.2.2. Criterio del confronto
- 1.2.3. Criterio integrale
- 1.2.4. Criterio di D'Alembert

#### 1.3. Criteri di convergenza assoluta

- 1.3.1. Criterio del confronto
- 1.3.2. Criterio di Cauchy o della radice
- 1.3.3. Criterio del rapporto
- 1.3.4. Criterio di Raabe
- 1.3.5. Criterio dell'infinitesimo
- 1.3.6. Criterio del riordino dei termini
- 1.3.7. Criterio del prodotto

#### 1.4. Criteri di convergenza per le serie alternate

- 1.4.1. Criterio di Leibniz

### 2. Nozioni elementari

- 2.1. Successione
- 2.2. Serie
- 2.3. Somme parziali, resti
- 2.4. Successione e insieme di somme
- 2.5. Combinazione lineare e prodotto di serie
- 2.6. Somma della serie
- 2.7. Riordinamento dei termini
- 2.8. Riordinamento di Riemann
- 2.9. Carattere della serie

### 3. La serie armonica

- 3.1. Serie armonica
- 3.2. Serie armonica alternata
- 3.3. Serie armonica generalizzata e serie di Dirichlet

### 4. Altre serie interessanti

- 4.1. Serie naturale
- 4.2. Serie di Mengoli
- 4.3. Serie fattoriali
- 4.4. Serie geometrica

### 5. Appendice

#### Allegati.

Il file *serie.zip* contiene i seguenti documenti:

- *serie\_hn.rtf*, primi 1000 numeri armonici
- *serie\_hn\_alt.rtf*, primi 1000 numeri armonici alternati
- *serie\_hn\_10000.rtf*, numero armonico di ordine  $10^4$
- *serie\_hn\_alt\_1000000.rtf*, numero armonico alternato di ordine  $10^5$

#### Notazioni.

- $v(\varepsilon) \rightarrow$  Dato un  $\varepsilon > 0$  arbitrario esiste un indice  $V$  tale che...
- Quando non ci sono ambiguità sul valore del primo e dell'ultimo termine di una

sommatoria finita il simbolo  $\sum_{k=1}^n$  viene

sostituito col simbolo  $\sum$ .

Lo stesso simbolo sarà utilizzato per le serie riordinate quando il contesto non consente ambiguità.

- $\rightarrow$  Tende a...
- $\doteq$  Ha per somma...
- $\mapsto$  Passaggio al limite

## 1 PRINCIPALI CRITERI DI CONVERGENZA

In base alla definizione di somma di una serie è possibile definire il suo carattere se:

- si conosce l'espressione della sua somma parziale generica,
- è possibile calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  di tale somma parziale.

Ma molto spesso non si è in grado di scrivere l'espressione di una somma parziale generica o non è facile calcolarne il suo limite e pertanto bisogna ricorrere ad altri metodi, ovvero all'applicazione dei criteri di convergenza.

Tali criteri si dividono in quattro gruppi principali:

1. Criteri validi per serie di qualsiasi tipo
2. Criteri validi per serie a termini di segno costante
3. Criteri validi per serie assolutamente convergenti
4. Criteri validi per serie alternate

### (1.1)Criteri generali

#### 1.1.1 Criterio con condizione necessaria e sufficiente di convergenza

*Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie è che per ogni  $n > \nu(\varepsilon)$*

*risulti  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$  per  $p$  intero qualunque.*

La dimostrazione è implicita nel *criterio di convergenza di Cauchy* secondo il quale per  $\nu(\varepsilon)$  per ogni  $m > n > \nu$  risulta  $|S_m - S_n| < \varepsilon$ . Infatti se è  $p = |m - n|$  si ha

$$S_m - S_n = S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$

Ma, in parole semplici, cosa ci dice questo criterio ?

Ci dice che, data una serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , se è possibile stabilire un  $\varepsilon$  piccolo a piacere in

corrispondenza del quale esiste un indice  $\nu$  per il quale tutte le somme parziali estratte con primo termine successivo a  $\nu$  e numero dei termini finito a piacere sono minori di  $\varepsilon$ , allora la serie converge.

► Esempio. Prendiamo la serie di Mengoli  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  la cui somma parziale generica di

ordine  $n$  è data da  $s_n = \frac{n}{n+1}$ ; stabiliamo un  $\varepsilon = \frac{1}{2} = s_1$  ed un indice  $\nu(\varepsilon) = 1$  e consideriamo

tutte le possibili estratte con primo indice il successivo; abbiamo

$s_p = a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$  e in generale  $\frac{n}{n+1} - s_\nu < s_\nu$ , senza neanche scomodare il valore assoluto, quindi la serie converge.

► Esempio. Se invece prendiamo la serie naturale  $\sum_{k=1}^{\infty} k$  la cui somma parziale generica è

data da  $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$  per il motivo opposto al precedente la serie divergerà.

Molto utile praticamente, anche se più debole, è il criterio seguente che da questo discende laddove si ponga  $p = 1$  risultando così  $|a_{n+1}| < \varepsilon$ , il che equivale a dire che  $a_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

### 1.1.2 Criterio con condizione necessaria di convergenza

a) Se una serie è convergente la successione che la origina tende necessariamente a zero per  $n \rightarrow \infty$ , ma non è sufficiente che una successione tenda a zero per  $n \rightarrow \infty$  perché la serie relativa sia convergente.

b) Se la successione che origina la serie non tende a zero per  $n \rightarrow \infty$  allora la serie diverge.

Come detto, si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$  se per  $n > \nu(\varepsilon)$  si ha  $|s_n - l| < \varepsilon$  e poiché  $\varepsilon$  è arbitrariamente piccolo è ovvio che i termini della successione di somme parziali  $\{s_n\}$  devono essere sempre più grandi e tendenti al limite  $l$  perché il valore assoluto della differenza tra loro e il limite sia piccolo a piacere. Ma perché ciò accada i termini della successione  $\{a_n\}$  devono essere sempre più piccoli e tendenti a zero.

► Esempio. Riferendoci ancora alla serie armonica si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , ma ciò non è sufficiente per stabilirne la convergenza secondo un criterio di sola necessità.

Infatti, se tentiamo la verifica col criterio necessario e sufficiente, ponendo  $p = n$  otteniamo

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \varepsilon. \text{ Ma la quantità a sinistra della disuguaglianza è ovviamente}$$

maggiore di  $n$  volte  $\frac{1}{2n}$ , ovvero  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ , e ciò per qualsiasi valore

di  $n$ . Pertanto, se  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$  il criterio non è verificato e la serie diverge.

### 1.1.3 Criterio della combinazione lineare

a) Se più serie convergono, la loro combinazione lineare converge verso la combinazione lineare delle loro somme:

$$\text{se } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow A, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \rightarrow B, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rightarrow C \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} (pa_k + qb_k + tc_k) \rightarrow pA + qB + tC$$

b) Se solo una delle serie date non converge non converge neanche la loro combinazione lineare.

Ciò discende dalla proprietà di omogeneità

$$\sum_{k=1}^{\infty} pa_k = p \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

e dalla proprietà di additività

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

L'assunto a) risulta inoltre evidente nel passaggio al limite di una qualsiasi combinazione lineare di somme parziali di ordine  $n$  per  $n \rightarrow \infty$

Per l'assunto b) diciamo che essendo  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + b_k) - a_k]$ , se delle due serie è solo

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  a convergere, per l'assunto a) se anche  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  convergesse allora convergerebbe

anche  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  contro l'ipotesi, per cui  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  non può convergere.

### 1.1.4 Criterio del resto

Il resto di una serie ha lo stesso carattere della serie stessa e se essa è convergente, la somma  $R$  del resto è data dalla somma  $S$  della serie meno la somma parziale estratta  $M$  :

$$\text{se } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow S, M = \sum_{k=1}^m a_k \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \rightarrow R = S - M$$

Viceversa se il resto di una serie convergente ha per somma  $R$ , la serie avrà per somma  $S = R + M$

Dato che  $M$  è una quantità finita l'assunto è evidente.

Questo criterio può essere enunciato anche nel modo seguente:

*Il carattere di una serie non cambia sopprimendo un numero finito di termini*

il che è ancora più evidente se si considerano le somme parziali

$$s_n = s_c + s_{n-c} \text{ con } s_c \in s_n$$

e poi si passa al limite per  $n \rightarrow \infty$

### 1.1.5 Criterio della proprietà associativa

Se una serie è convergente o divergente qualunque nuova serie ottenuta applicando la proprietà associativa alla serie d'origine ha lo stesso carattere di questa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + a_5 + \dots + (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) + \dots$$

L'assunto è evidente poiché la nuova serie è generata da una successione di somme parziali della serie d'origine.

Attenzione. Il criterio non è valido per le serie indeterminate.

► Esempio. Se consideriamo la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

è evidente che la nuova serie ottenuta applicando la proprietà associativa in questo modo

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots \text{ converge a zero}$$

mentre applicando la proprietà associativa in quest'altro modo

$$(1 - 1 + 1) + (-1 + 1 - 1) + (1 - 1 + 1) + \dots \text{ resta indeterminata.}$$

### 1.1.6 Criterio della somma e della differenza

Date due serie se  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq A$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq B$  allora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq A \pm B$$

Se  $s_n$  e  $z_n$  sono due somme parziali di ordine  $n$  delle due serie date, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm z_n) = A \pm B$$

e quindi la tesi.

Possiamo anche intendere la serie somma delle due serie date come serie cui sia stata applicata la proprietà associativa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a_1 + a_2 + \dots + b_1 + b_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$$

da cui passando al limite si ottiene il risultato precedente.

## (1.2) Criteri per le serie a termini di segno costante

Possiamo supporre, senza inficiare la validità dei criteri, che le serie siano a termini tutti positivi.

### 1.2.1 Criterio di non indeterminazione

Una serie a termini tutti positivi non può essere indeterminata e quindi una serie indeterminata non può avere tutti i termini positivi. La somma di una tale serie è l'estremo superiore dell'insieme delle somme parziali ovvero dell'insieme di tutte le possibili somme generalizzate.

a) Che l'estremo superiore dell'insieme delle *summe parziali*  $P$  sia la somma  $S$ , finita o non finita, della serie è evidente dal momento che essendo tutti i termini della serie positivi la loro successione è crescente ed ha per limite tale estremo superiore.

b) Che l'estremo superiore dell'insieme delle *summe generalizzate*  $G$  sia la somma  $S$ , finita o non finita, della serie si deduce dal fatto che ogni elemento di ordine  $n$  di  $G$  è minore del corrispondente elemento dello stesso ordine di  $P$ . E poichè ogni elemento di  $P$  è minore di  $S$  l'assunto è dimostrato.

Il punto b) permette di affermare che data una serie a termini non negativi di somma  $S$  qualsiasi altra serie da questa ottenuta rimescolandone i termini ha sempre somma  $S$ . Infatti tutte le infinite serie ottenibili hanno sempre lo stesso insieme di somme generalizzate.

### 1.2.2 Criterio del confronto

Date due serie a termini non negativi  $\sum u_k, \sum v_k$  per le quali si abbia per ogni indice  $k$   $u_k \leq m v_k$  con  $m > 0$ , allora:

- se  $\sum u_k$  diverge, diverge anche  $\sum v_k$
- se  $\sum v_k$  converge, converge anche  $\sum u_k$

La dimostrazione è banale in quanto, data l'ipotesi  $u_k \leq m v_k$ , se  $\sum u_k \rightarrow U, \sum v_k \rightarrow V$  allora  $U \leq mV$ , per cui passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha la tesi.

Nel criterio del confronto spesso è possibile usare la serie di Dirichlet.

► Esempio. Sia data la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$  che si può scrivere  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2k}} \right) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}$

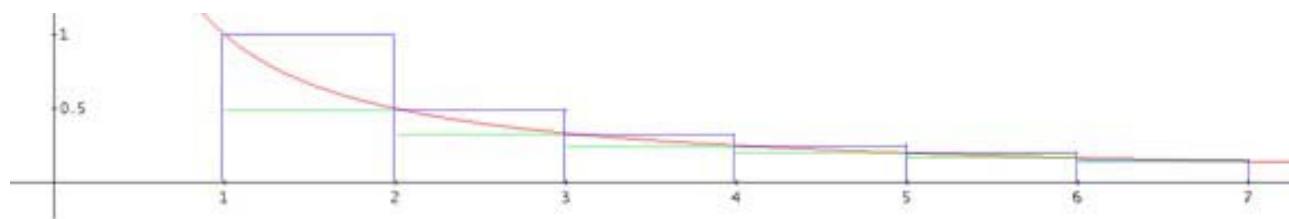
dove il secondo fattore del prodotto tra parentesi può essere trascurato con un errore minimo. Poiché la serie di Dirichlet per  $s_k = 1, p = 2$  converge, per il teorema del confronto convergerà anche la serie data.

### 1.2.3 Criterio integrale

Se  $f(x)$  è una funzione continua tale che  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  è una serie a termini positivi allora:

se  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converge, converge anche  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

se  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  diverge, diverge anche  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$



Dimostrazione. Poiché l'integrale improprio  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  è minore dell'area dello scaloide

circoscritto (blu), è evidente che se tale integrale diverge, essendo  $s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx$  anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mapsto \infty.$$

Del resto, poiché l'integrale improprio è maggiore dell'area dello scaloide inscritto (verde), è altrettanto evidente che se tale integrale converge, essendo

$$s_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx \Rightarrow s_{n+1} < a_1 + \int_1^{n+1} f(x) dx \text{ convergerà anche la serie.}$$

Un esempio di applicazione del criterio integrale è dato dalla *Serie di Dirichlet*.

### 1.2.4 Criterio di D'Alembert

Se in una serie a termini tutti positivi si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  con  $l$  finito, allora

se  $l < 1$  la serie converge

se  $l > 1$  la serie diverge

se  $l = 1$  la serie converge o diverge

Caso  $l < 1$ .

Per ipotesi possiamo trovare un numero  $l < q < 1$  tale che a partire da un certo indice  $n$  si

$$\text{abbia sempre } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q - l \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < qa_n.$$

Ma ciò possiamo scriverlo per diversi indici  $n$ :

$$a_{n+1} < qa_n = qa_n$$

$$a_{n+2} < qa_{n+1} < q^2 a_n$$

$$a_{n+3} < qa_{n+2} < q^3 a_n$$

...

$$a_{n+m} < qa_{n+m-1} < q^m a_n$$

Consideriamo ora la serie geometrica di ragione  $0 < q < 1$

$$a_n + qa_n + q^2 a_n + \dots + q^m a_n + \dots$$

Tale serie converge e a partire da un indice  $n + 1$  tutti i suoi termini sono maggiori dei termini della serie

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m-1} + \dots$$

che pertanto per il criterio del confronto tra serie a termini non negativi e per il criterio di convergenza con condizione necessaria e sufficiente converge anch'essa.

Caso  $l > 1$ .

Ora per ipotesi abbiamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  il che vuol dire che possiamo trovare un indice  $n$  tale

che per tutti gli indici successivi si abbia  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$  il che ci porta a concludere

che crescendo i termini della serie a partire dall'indice  $n + 1$  la serie divergerà.

► Esempio. Sia data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Essa converge perché si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

► Esempio. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$$

è invece divergente perché si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 2 > 1$$

### (1.3) Criteri di convergenza assoluta

#### 1.3.1 Criterio del confronto

Vale il criterio precedente per  $|u_k| \leq mv_k$

#### 1.3.2 Criterio di Cauchy o della radice

Se per ogni indice  $k$  della serie si ha  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq p$  con  $0 < p < 1$  allora la serie è convergente

Riscrivendo l'ipotesi nel modo seguente

$$|a_k| \leq p^k$$

si vede immediatamente, per il teorema del confronto, che la serie data  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge

convergendo la serie geometrica  $\sum_{k=1}^{\infty} p^k$ .

Possiamo utilizzare questo criterio in altro modo.

Se la serie è a termini positivi e si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$  con  $p$  limite finito allora:

se  $p < 1$  la serie converge assolutamente

se  $p > 1$  la serie diverge

se  $p = 1$  la serie può convergere o divergere

Se  $p < 1$  rientriamo nella formulazione precedente.

Se  $p > 1$  si ha  $a_k > 1^k$  ovvero tutti i termini sono maggiori di 1 e quindi la serie diverge.

Se  $p = 1$  è necessario vedere caso per caso.

► Esempio. Per la serie armonica che è divergente si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ , mentre per la serie

armonica generalizzata che converge si ha, ovviamente, ancora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}} = 1$  ( $m$  intero  $> 1$ ).

Chi è interessato al calcolo di questi due semplici limiti troverà il loro sviluppo in appendice.

#### 1.3.3 Criterio del rapporto

Se una serie ha tutti i termini diversi da zero e si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = p$  con  $p$  limite finito allora

se  $p < 1$  essa è assolutamente convergente

se  $p > 1$  essa non converge

se  $p = 1$  la serie può convergere, divergere o essere indeterminata.

$p < 1$ . Per i primi termini della serie abbiamo  $|a_2| < pa_1, |a_3| < pa_2 < ppa_1, \dots$  e quindi per il termine generico si ha  $|a_k| < p^{k-1}a_1$ . Il secondo membro di questa disuguaglianza è il termine

generico di una serie geometrica che con  $0 < p < 1$  converge e pertanto per il teorema del confronto converge anche la serie il cui termine generico è il primo membro.

$p > 1$ . Se la serie converge allora il suo termine generico deve tendere a zero,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ,

ma ciò non è possibile perché essendo tutti i termini positivi essi non formano una successione decrescente; quindi per il criterio necessario di convergenza la serie non può convergere

### 1.3.4 Criterio di Raabe

Se una serie ha tutti i termini diversi da zero e per ogni indice  $k$  si ha  $k \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} - (k+1) = p$

allora

se  $p > 0$  la serie converge assolutamente

se  $p \leq 0$  la serie non converge

Joseph Ludwig Raabe,  
matematico svizzero, 1801–1859

Vediamo il caso  $p > 0$ .

Con un semplice passaggio algebrico si ha  $k|a_k| - (k+1)|a_{k+1}| > 0$  ovvero

$k|a_k| > (k+1)|a_{k+1}|$ , il che equivale ad affermare che il primo membro di questa

disuguaglianza è il termine generico di una successione decrescente di termini positivi che ha un limite finito e non negativo  $l$ :

a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} k|a_k| = l > 0$ .

Ora consideriamo la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} [k|a_k| - (k+1)|a_{k+1}|]$  e la sua somma parziale di ordine  $n$ :

$$1a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + 3a_3 - 4a_4 + \dots + na_n - (n+1)|a_{n+1}| \Rightarrow |a_1| - (n+1)|a_{n+1}|.$$

Tale somma parziale per il punto a) ha evidentemente un limite finito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_1| - (n+1)|a_{n+1}| = |a_1| - l$$

e pertanto la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} [k|a_k| - (k+1)|a_{k+1}|]$  converge.

Caso  $p \leq 0$ .

Si avrebbe  $k|a_k| \leq (k+1)|a_{k+1}|$  e quindi il primo membro della disuguaglianza è il termine generico di una successione non decrescente sul limite della quale si può dire solamente che è positivo, potendo essere finito o non finito. Questo equivale ad affermare che per  $k \rightarrow \infty$ ,  $|a_k|$  è infinitesimo di ordine  $\leq 1$  e che la serie non è assolutamente convergente.

Per giustificare questa affermazione occorre un altro criterio, il seguente.

### 1.3.5 Criterio dell'infinitesimo

Data una serie il cui termine generico per  $k \rightarrow \infty$  è infinitesimo di ordine  $q$  rispetto

all'infinitesimo principale  $\frac{1}{k}$ , allora

se  $q > 1$  la serie è assolutamente convergente

se  $q < 1$  la serie non è assolutamente convergente

Data l'ipotesi si ha che  $t < k^q |a_k| < p$  con  $0 < t < p$  e quindi che  $\frac{t}{k^q} < |a_k| < \frac{p}{k^q}$ .

Ma se  $q > 1$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$  converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ . E se  $q < 1$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$  diverge e quindi per il criterio del confronto diverge anche la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ .

### 1.3.6 Criterio del riordino dei termini

*Se una serie converge assolutamente, qualunque altra serie dedotta dalla prima riordinandone i termini a piacere:*

- a) è ancora assolutamente convergente
- b) ha la stessa somma della prima.

a) E' diretta conseguenza del criterio di non indeterminatezza.

b) E' evidente che l'insieme delle somme generalizzate relativo alla serie riordinata è lo stesso della serie data e pertanto, essendo la somma di una serie l'estremo superiore di tale insieme, le somme delle due serie coincidono.

Sottolineiamo che tale criterio è valido solo se la serie converge assolutamente.

Se infatti prendiamo come esempio la serie armonica alternata si ha che...

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \doteq \ln 2$$

ma se riordiniamo i termini di questa serie nel modo seguente si ha invece che...

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \doteq \frac{3 \ln 2}{2}$$

La dimostrazione è nel capitolo successivo.

### 1.3.7 Criterio del prodotto

*Se due serie sono assolutamente convergenti, ogni loro serie-prodotto:*

- a) è assolutamente convergente
- b) ha per somma il prodotto delle somme delle due serie date.

a) La convergenza assoluta delle serie date implica che qualunque loro somma generalizzata rimanga limitata al variare degli indici. Pertanto l'insieme dei prodotti delle somme generalizzate è limitato, il che prova la convergenza della serie-prodotto delle serie date.

b) La dimostrazione che la serie-prodotto è convergente implica che la sua somma non dipende dall'ordinamento dei termini delle serie-fattori e quindi possiamo considerare una serie-prodotto, ad esempio, per quadrati:

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

$$\dots + (a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_n b_{n-2} + \dots + a_n b_1) + \dots$$

Consideriamo ora le ridotte di tale serie:

$$s_1 = a_1 b_1$$

$$s_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

$$s_3 = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

...

$$s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Il termine a secondo membro della ridotta generica è la ridotta-prodotto generica della serie-prodotto e pertanto passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si dimostra l'assunto.

## (1.4) Criteri di convergenza per le serie alternate

### 1.4.1 Criterio di Leibniz

Se  $\{a_n\}$  è una successione monotona decrescente e se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  la serie alternata

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

a) converge

b) la sua somma  $S$  è positiva e non maggiore del primo termine

c) si ha  $0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}$

a) Applichiamo la proprietà associativa alla serie in due modi diversi ricavando due somme parziali, una con un numero pari di elementi ed una con un numero dispari:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots \Rightarrow s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots \Rightarrow s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

Per ipotesi i termini tra parentesi sono tutti positivi e quindi si può affermare che la successione di somme parziali con numero pari di elementi è monotona crescente ed è limitata inferiormente da  $s_2$  mentre la successione di somme parziali con numero dispari di elementi è monotona decrescente e limitata inferiormente da  $s_1$ . Le due successioni tendono pertanto a limiti finiti; basta dimostrare che tali limiti coincidono per completare la prima parte della dimostrazione.

Ma ciò è molto semplice dal momento che si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} -a_{2n} = 0$$

b) Si tenga conto che per la positività di tutti i termini tra parentesi la somma  $S$  della serie sarà  $0 < S < a_1$ .

c) Si osservi che la successione  $\{s_{2n}\}$  è crescente mentre  $\{s_{2n+1}\}$  è decrescente e quindi deve essere

$$s_{2n} < s_{2n+2} \leq S$$

$$S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1}$$

ovvero

$$0 < S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

$$0 < s_{2n-1} - S \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$$

da cui, leggendo queste due ultime disuguaglianze in colonna, si ha la tesi.

Il criterio di Leibniz permette di calcolare la somma di una serie a meno di un errore dato.

Un esempio è dato nella serie armonica alternata.

■

## 2 NOZIONI ELEMENTARI

### (2.1) Successione

E' una legge che ad ogni numero naturale  $n$  fa corrispondere un numero reale  $a_n$  :

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

I numeri naturali sono essi stessi una successione.

### (2.2) Serie

*Formalmente* è la somma degli infiniti termini della successione cui si riferisce:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Pertanto al termine "serie" non viene *per ora* attribuito alcun valore numerico né un significato diverso dal simbolo di sommatoria che lo rappresenta; in altre parole, in generale e senza conoscerne il carattere, la serie *non* è un numero che rappresenta una somma.

Per quanto riguarda il *segno* dei termini della serie abbiamo principalmente:

- *serie a termini costanti*  $\rightarrow$  tutti positivi o tutti negativi
- *serie a termini di segno alternato* o *serie alternate*  $\rightarrow$  alternativamente positivi e negativi
- *serie a termini positivi*  $\rightarrow$  tutti positivi
- *serie a termini non negativi*  $\rightarrow$  tutti positivi o nulli

### (2.3) Somme parziali, resti

Le somme parziali  $s_n$  o ridotte, in quanto somme di un numero finito di elementi della serie, *sono dei numeri*.

- **Somma parziale o ridotta di ordine  $n$** : è un numero che rappresenta la somma dei primi  $n$  termini della serie:  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum a_k$ . Attenzione, questo simbolo *non è una serie*.

- **Somma parziale estratta**: è un numero che rappresenta la somma degli  $m = (q - p)$ ,  $q > p$

$$\text{termini della serie: } s_m = a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q = \sum_{k=p+1}^q a_k$$

- **Somma parziale generalizzata**: è un numero che rappresenta la somma di un numero finito  $m$  di termini della serie scelti ad arbitrio purché ciascuno di indice inferiore al successivo:  $s_m = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n}$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ . I due primi tipi di somme sono chiaramente casi particolari della terza. Attenzione agli indici.  $k_1, k_2, \dots, k_n$  non indicano termini adiacenti ma termini *successivi*. Questo è il motivo per il quale una somma parziale generalizzata non può essere rappresentata col simbolo di sommatoria.

- **Resto**: data una serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  e una sua somma parziale estratta  $\sum_{k=1}^m a_k$ , il resto della serie è

$$\text{dato da } \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$$

### (2.4) Successione e insieme di somme

- **Successione di somme parziali**: è la legge che ad ogni numero naturale  $n$  fa corrispondere

$$\text{la somma parziale di ordine } n \text{ della serie } s_n : \{s_n\} = \sum_{k=1}^1 a_k, \sum_{k=1}^2 a_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_k, \dots$$

- **Successione di somme parziali estratte:** è la legge che ad un certo numero di indici  $v_k$  con  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  fa corrispondere le somme parziali della serie  $s_n$ :

$$\{s_{v}\} = \sum_{k=1}^{v_1} a_k, \sum_{k=v_1+1}^{v_2} a_k, \sum_{k=v_2+1}^{v_n} a_k, \dots, \sum_{k=v_n+1}^{\infty} a_k$$

Questa è di fatto un'applicazione alle serie della proprietà associativa

$$s_v = \sum_{k=1}^{v_1} a_k + \sum_{k=v_1+1}^{v_2} a_k + \sum_{k=v_2+1}^{v_n} a_k + \dots + \sum_{k=v_n+1}^{\infty} a_k$$

che però non è valida come vedremo per serie indeterminate.

- **Insieme di somme parziali generalizzate:** è l'insieme di tutte le possibili somme generalizzate di una serie le quali, come è ovvio, non possono costituire una successione.

D'ora in poi leggendo il termine 'successione' si faccia attenzione a non confondere la *successione*  $\{a_n\}$  che origina la serie con la *successione di somme parziali*  $\{s_n\}$ .

## (2.5) Combinazione lineare e prodotto di serie

- **Combinazione lineare di serie:** dati  $p, q, t$  reali e le serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (pa_k + qb_k + tc_k)$$
 è combinazione lineare delle serie date.

- **Prodotto di serie:** due serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{h=1}^{\infty} b_h$  possono essere moltiplicate termine a termine per

ottenere una serie-prodotto:  $\sum_{k,h=1}^{\infty} a_k b_h$ . Ma questa serie è solo una delle infinite serie-prodotto

ottenibili. Infatti sono serie-prodotto tutte le serie ottenibili moltiplicando termine a termine le serie date dopo un qualsiasi loro riordino dei termini, e poiché i modi di riordino sono infiniti, infinite sono le serie-prodotto ottenibili:

$$a_1 \sum_{h=1}^{\infty} b_h, b_{127} \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \dots$$

- **Serie-prodotto di Cauchy:** di non facile descrizione. Si cerchi di afferrarne la legge in base alle associazioni eseguite in somme di 1,2,3,4,5,6,7,... prodotti:

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + (a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) + \dots$$

$$\dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) + \dots$$

- **Serie-prodotto per quadrati:** come sopra, in somme di 1,3,5,7,...prodotti:

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

$$\dots + (a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_n b_{n-2} + \dots + a_n b_1) + \dots$$

## (2.6) Somma della serie

E' il limite  $l$ , se esiste, finito o infinito, della successione di somme parziali  $\{s_n\}$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

- Se stabilito un  $\varepsilon > 0$  arbitrario esiste in sua corrispondenza un indice  $\nu$  tale che per ogni

$$n > \nu \text{ si ha } |s_n - A| < \varepsilon, \text{ allora la serie ha per somma il numero } A: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq A$$

- Se stabilito un  $M$  arbitrario esiste in sua corrispondenza un indice  $\nu$  tale che per ogni  $n > \nu$

$$\text{si ha } a_n > M, \text{ allora la serie ha per somma } +\infty: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq +\infty$$

- Se stabilito un  $M$  arbitrario esiste in sua corrispondenza un indice  $\nu$  tale che per ogni  $n > \nu$  si ha  $a_n < M$ , allora la serie ha per somma  $-\infty : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq -\infty$
- Se non esiste un limite, finito o infinito, della successione di somme parziali  $\{s_n\}$ , la serie è priva di somma.

Alcuni autori definiscono come *prive di somma* le serie per le quali  $l$  non è finito. Per queste serie noi adotteremo la dizione *con somma non finita*.

Le somme delle serie godono della proprietà di linearità:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq A + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq B \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq A + B$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq A + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq \infty + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq B \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \doteq \infty + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \doteq ?$$

Nell'ultimo caso il punto di domanda significa che la somma può essere finita o non finita.

### (2.7) Riordinamento dei termini

E' possibile alterare l'ordine dei termini di una serie mantenendo la sua somma solo se la serie è assolutamente convergente. Il che non vuol dire che riordinando in qualche maniera i termini di una serie che converge semplicemente la sua somma debba cambiare: essa *può* cambiare.

Si prenda ad esempio la serie armonica alternata:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \doteq \ln 2$$

ma se riordiniamo i termini di questa serie nel modo seguente si ha invece che...

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \doteq \frac{3 \ln 2}{2}$$

del resto nel capitolo successivo dimostreremo, riordinandone i termini in modo diverso, che la somma della serie armonica alternata è  $\ln 2$ :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2k} \doteq \ln 2$$

Dimostriamo perché col primo riordinamento la somma della serie cambia, trovando una simbologia per una ridotta di ordine  $n$  della serie così riordinata.

Supponendo  $n = 3m$  avremo

$$s_{3m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k}$$

Per ottenere il corretto ordinamento con questi simboli bisogna guardare agli indici superiori delle sommatorie:  $2m, m \rightarrow$  (due termini con la prima sommatoria) - (uno con la seconda) + (due termini con la prima) - (uno con la seconda) + ... e così via.

Con questi simboli avremo sempre ridotte con  $2m$  termini positivi ed  $m$  negativi.

Eseguiamo un artificio algebrico

$$\sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} = \left( \sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{4m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

Ora applichiamo la relazione asintotica tramite costante di Eulero-Mascheroni trovata in (3.2)

$$s_{3m} = (\ln 4m + \gamma + \alpha_1) - \frac{1}{2}(\ln 2m + \gamma + \alpha_1) - \frac{1}{2}(\ln m + \gamma + \alpha_1) = \frac{3}{2} \ln 2$$

Ma questo è un risultato ancora parziale in quanto nulla ci dice su ridotte di ordine  $3m+1$  e  $3m-1$ . Però basta osservare che si ha

$$s_{3m+1} = s_{3m} + \frac{1}{4m+1}$$

$$s_{m-1} = s_{3m} - \frac{1}{2m}$$

e che queste ridotte hanno evidentemente lo stesso limite di  $s_{3m} \rightarrow \ln 2$  per  $m \rightarrow \infty$ .

## (2.8) Riordinamento di Riemann

Come detto all'inizio del paragrafo precedente, riordinando i termini di una serie semplicemente convergente è possibile che la sua somma cambi.

Si deve a Riemann l'aver scoperto che :

*data una serie a termini reali semplicemente convergente è sempre possibile riordinarne i termini in modo che la nuova serie abbia una somma determinata.*

Si tratta di un semplice metodo di riordinamento che sfrutta appunto la possibilità di variazione della somma delle serie semplicemente convergenti..

La dimostrazione del teorema e il metodo di riordinamento sono in appendice.

## (2.9) Carattere della serie

E' la proprietà della serie legata al limite della successione di somme parziali.

- **serie convergente:** il limite esiste ed è finito:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} \doteq \frac{3}{4}.$$

Se la serie converge abbiamo dunque un limite che rappresenta la somma degli infiniti termini della serie stessa e quindi il simbolo di sommatoria che rappresenta la serie ha in questo caso un significato numerico.

Per le serie a termini tutti positivi la non convergenza per il criterio di non indeterminazione significa automaticamente divergenza. Per serie a termini non tutti positivi ciò non è necessariamente vero; la serie alternata illustrata più avanti non converge e neanche diverge.

- **serie assolutamente convergente:** esiste ed è finito il limite della corrispondente serie dei valori assoluti; in tal caso anche la serie data converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \doteq \frac{\pi}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \doteq \frac{\pi}{6}$$

- **serie semiconvergente :** Esiste ed è finito il limite della serie di segni qualsiasi e non è finito il limite della corrispondente serie dei valori assoluti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \doteq \ln 2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \doteq +\infty$$

- **serie divergente:** il limite non è finito:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \doteq +\infty$$

- **serie indeterminata:** il limite non esiste:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \doteq ?$$

■

### 3 LA SERIE ARMONICA

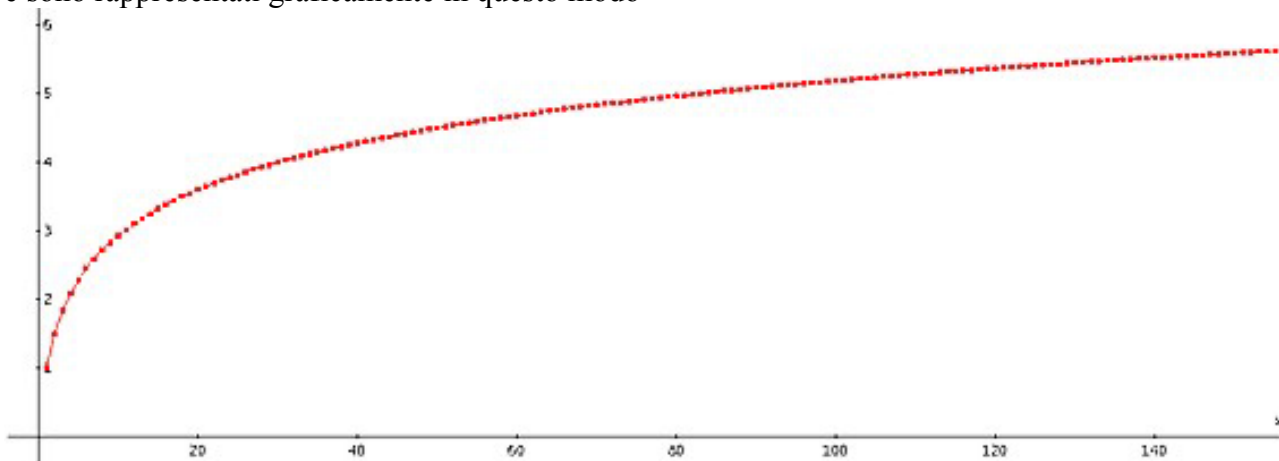
(3.1) ► **Serie armonica:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

La somma parziale di ordine  $n$  della serie armonica è detta *numero armonico ennesimo*.

Come si verifica direttamente i primi numeri armonici sono, a partire dal secondo, numeri razionali (mai interi tranne il primo) con numeratore dispari e denominatore pari

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \dots$$

e sono rappresentati graficamente in questo modo



L'argomento deborda rapidamente dai ristretti confini di questo lavoro per cui ne diamo solo dei brevissimi cenni.

Il *numero armonico ennesimo* è rappresentato analiticamente da  $H_n = \gamma + \psi_0(n+1)$

dove  $\gamma$  è la *costante di Eulero-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \simeq 0,577215664901532860606512090082402431042\dots$$

e  $\psi_0(x)$  è la *Funzione Digamma* che a sua volta è definita come derivata logaritmica della *Funzione Gamma*

$$\psi_0(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$$

Della *Funzione Gamma* ci limitiamo a dire che per essa è valida la relazione seguente

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Per completare questo quadro estremamente sintetico diciamo che la serie armonica è un caso particolare della *Serie Armonica Generalizzata* per  $p = 1$  trattata più avanti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

con  $p$  reale positivo.

Se poi  $p$  è un numero complesso  $s$  si ha

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

ovvero la *Funzione Zeta di Riemann*.

Il limite della successione armonica è chiaramente zero.

In onore dei due grandi matematici il primo dei quali riuscì a calcolarne le prime 16 cifre e il secondo le successive 16. Non è ancora noto se  $\gamma$  è razionale o irrazionale.

Alla forma finale della funzione Zeta si arriva partendo dalla sua espressione analitica

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

che può essere ricondotta all'espressione

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

Calcolando l'integrale si trova

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \Gamma(s)$$

di qui la forma finale della funzione Zeta.

Per dimostrare che il limite della successione dei numeri armonici è  $+\infty$  e che quindi la serie armonica diverge si utilizza il criterio integrale.

La funzione  $y = \frac{1}{x}$  con  $x$  numero reale è rappresentata graficamente da un ramo di iperbole il cui

integrale nell'intervallo  $(1, n+1)$  è dato da  $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$  e poiché  $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$  per

$n \rightarrow \infty$ , anche la serie armonica diverge positivamente.

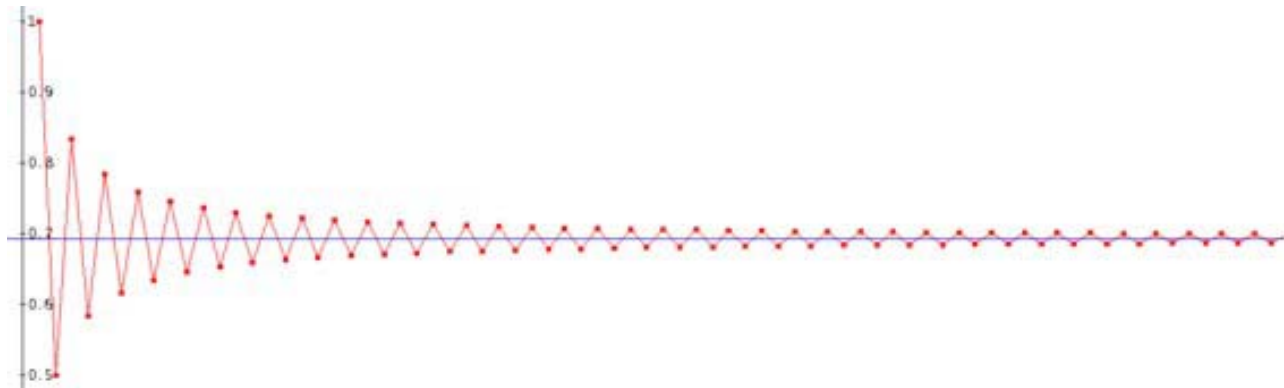
(3.2) ► **Serie armonica alternata**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

Il limite della successione a segni alternati è zero e pertanto per il *criterio di Leibniz* la serie relativa converge, ed più propriamente è *semiconvergente* perché la serie formata dai valori assoluti dei suoi termini è la serie armonica che diverge.

Come si verifica direttamente le prime somme parziali sono

$$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{47}{60}, \frac{37}{60}, \frac{319}{420}, \frac{533}{840}, \dots$$

Ecco il grafico per le prime 76 somme parziali della serie che possiamo chiamare *numeri armonici alternati*



che mostra chiaramente come le somme parziali di indice pari formino una successione crescente e quelle dispari una decrescente e come tutte le somme parziali di indice pari siano minori di tutte le somme parziali di indice dispari.

Ma a cosa tendono le due successioni ?

Tendono a  $\ln 2 \simeq 0.6931471805\dots \rightarrow \left\{ s_{10^6} \right\} \simeq 0.6931466805\dots$

Ancora una volta ci troviamo di fronte ad un argomento che deborda dai limiti di questo lavoro; infatti la serie a segni alternati è rappresentata analiticamente da

$$H'_n = \ln 2 + \frac{1}{2} (-1)^n \left[ \frac{\psi_0}{2}(n+1) + \frac{\psi_0}{2}(n+2) \right]$$

con  $\psi_0(x)$  che rappresenta sempre la funzione Digamma.

Possiamo però dare conto senza particolari difficoltà della somma della serie armonica alternata

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \doteq \ln 2$$

Per fare ciò dobbiamo partire dalla costante di Eulero-Mascheroni vedendo come si arriva alla sua espressione analitica.

Consideriamo la successione

$$\{a_n\} = 1, \int_1^2 \frac{dx}{x}, \frac{1}{2}, \int_2^3 \frac{dx}{x}, \dots, \frac{1}{n-1}, \dots, \int_{n-2}^{n-1} \frac{dx}{x}, \dots$$

i cui primi termini sono

$$1, \ln 2, \frac{1}{2}, (\ln 3 - \ln 2), \dots \simeq 1, 0.6, 0.5, 0.4, \dots$$

Tale successione è evidentemente decrescente e il suo termine generico  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Allora per il criterio di Leibniz la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  converge ed ha una somma finita

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \doteq \gamma.$$

Calcoliamo tale somma scrivendo la ridotta di ordine  $(2n-1)$

$$\begin{aligned} s_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \dots - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \end{aligned}$$

Passando al limite avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \gamma$$

Ed ecco trovato il valore della costante di Eulero-Mascheroni.

L'espressione analitica di tale costante possiamo scriverla in modo da isolare la ridotta di ordine  $n$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \gamma + \ln n + \alpha_n \text{ con } \alpha_n \text{ infinitesimo.}$$

Tale espressione ci dice che, sopprimendo il primo ed il terzo termine del secondo membro con un errore minimo, si ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \simeq \ln n$$

e che quindi le ridotte della serie armonica crescono con andamento logaritmico, come evidenziato dal grafico del paragrafo precedente.

Ma torniamo alla serie armonica alternata le cui ridotte di ordine pari contengono evidentemente lo stesso numero di termini positivi e negativi. Applicando la proprietà associativa ad una ridotta di ordine  $2n$  possiamo separare i termini positivi dai negativi

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2k}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Utilizzando l'espressione analitica tramite costante di Eulero-Mascheroni della ridotta ennesima otteniamo la *relazione asintotica*

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \gamma + \ln 2n + \alpha_{2n} - \gamma - \ln n - \alpha_n = \ln 2 + (\alpha_{2n} - \alpha_n)$$

da cui passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \doteq \ln 2$$

c.v.d.

(3.3) ► **Serie armonica generalizzata**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  con  $p$  intero.

Se  $p > 1$  applicando il criterio integrale si ha  $\int_1^{\infty} \frac{1}{k^p} dx = \frac{1}{p-1}$

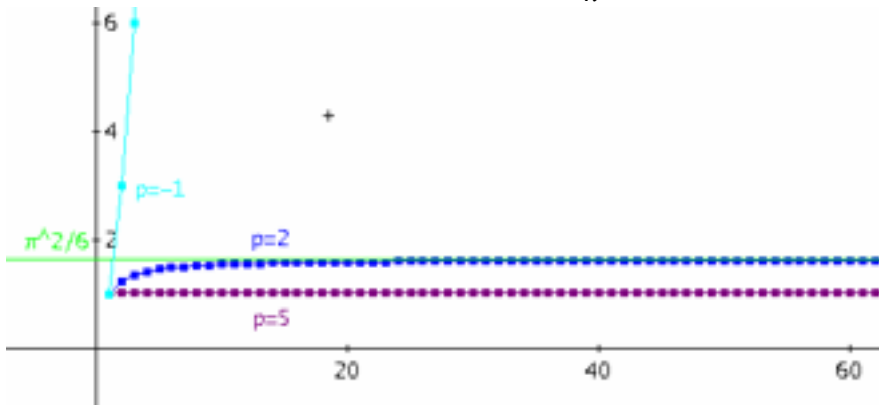
ovvero l'integrale è finito e quindi la serie converge.

Se  $p \leq 1$  in base al criterio integrale si ha  $\int_1^{\infty} \frac{1}{k^p} dx = \infty$  e quindi la serie diverge.

La serie armonica generalizzata è una **serie di Dirichlet** la cui forma generale è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{k^p}$$

con gli  $S_k$  numeri complessi.



Cosa succede se  $p = 2$  ?

Ripeschiamo la funzione Zeta di Riemann che con  $s = 2$  diventa una delle formule di Eulero

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Quindi la serie armonica generalizzata con esponente 2 converge a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \doteq 1,6449340668482264364\dots$$

Dai i risultati ottenuti nel paragrafo precedente sappiamo che le ridotte della serie armonica crescono con andamento logaritmico e poiché la serie armonica è una serie armonica generalizzata le ridotte di tutte le serie armoniche generalizzate cresceranno con tale andamento.

Eulero ha calcolato i valori della funzione Zeta da  $\zeta(2)$  a  $\zeta(26)$  solo per i termini di indice pari.

Ecco i primi dieci valori per indici pari e dispari:

$$\zeta(1) = \infty$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,64493406\dots$$

$$\zeta(3) = 1,2020569032\dots$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082323233\dots$$

$$\zeta(5) = 1,0369277551\dots$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1,017343061\dots$$

$$\zeta(7) = 1,0083492774\dots$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1,004077356\dots$$

$$\zeta(9) = 1,0020083928\dots$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1,000994575\dots$$

#### 4 ALTRE SERIE INTERESSANTI

(4.1) ► **Serie naturale:**  $\sum_{k=1}^{\infty} k$

La somma parziale di ordine  $n$  è:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

E' la formuletta alla base dell'aneddoto su Gauss che all'età di nove anni che l'avrebbe dedotta da questa tabella:

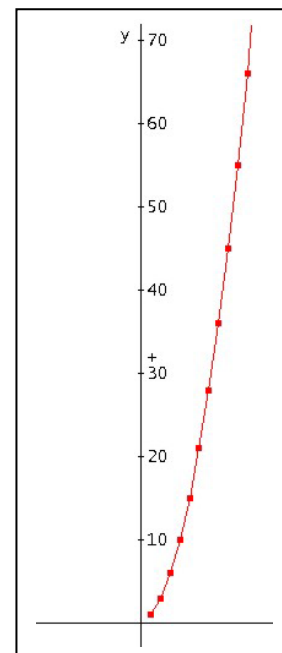
$$\begin{array}{rcl} 1 + n & = & n+1 \\ 2 + n-1 & = & n+1 \\ 3 + n-2 & = & n+1 \rightarrow 2 \sum k = n(n+1) \rightarrow \sum k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \dots + \dots & = & \dots \\ n + 1 & = & n+1 \end{array}$$

Si dimostra per induzione:

$$\frac{n(n+1)}{n} + (n+1) = \frac{n(n+1) + n^2 + n}{n} = \frac{n(n+2)}{n}$$

Poichè  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$  la serie è divergente. Inoltre, per la proposizione b) del criterio necessario di convergenza, poichè  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  la serie non può convergere e quindi non essendo

indeterminata diverge. Pertanto la serie naturale ha somma non finita:  $\sum_{k=1}^{\infty} k \doteq +\infty$



(4.2) ► **Serie di Mengoli:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

La somma parziale di ordine  $n$  è

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + (\dots) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

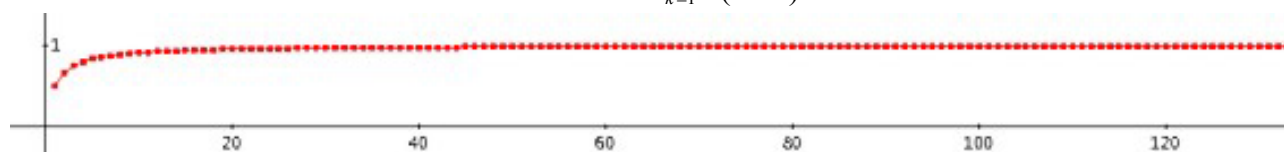
Si dimostra per induzione:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Il limite della successione è chiaramente zero, mentre il limite della successione di somme parziali di ordine  $n$  è:

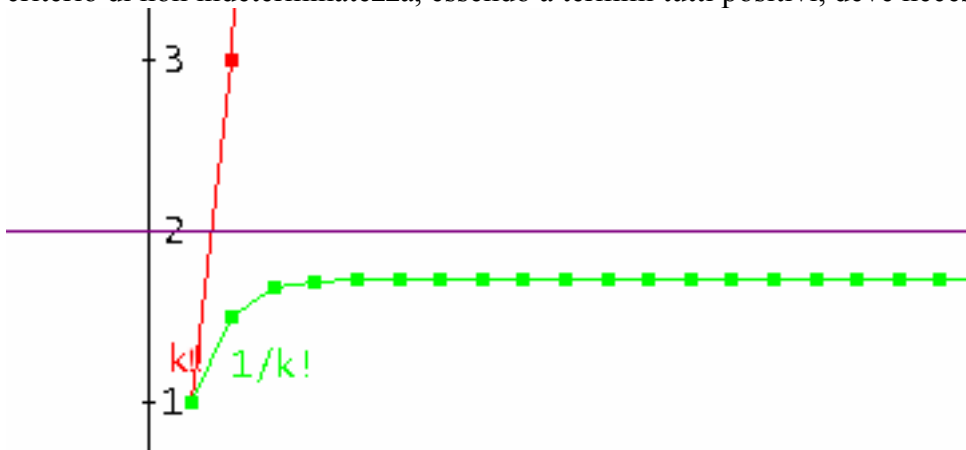
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

La serie è quindi convergente ed ha somma finita:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \doteq 1$



(4.3) ► Serie fattoriali:  $\sum_{k=1}^{\infty} k!$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k!$  ha il termine generico  $a_n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$  e pertanto non può convergere. Per il criterio di non indeterminatezza, essendo a termini tutti positivi, deve necessariamente divergere.



La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$  invece converge ed ha somma finita pari a 2. Dimostriamolo.

Che la serie converge ce lo dice il criterio di D'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Ma possiamo verificare la convergenza e trovare la somma con un unico metodo.

Troviamo una serie la cui ridotta di ordine  $n$  sia maggiore o uguale alla ridotta di ordine  $n$  della serie data

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

La ridotta che abbiamo appena trovato è la ridotta di una serie geometrica di primo termine 1 e ragione  $r = \frac{1}{2}$  che per  $|r| < 1$  converge e pertanto la successione delle sue ridotte è limitata superiormente

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Poiché la somma di tale serie geometrica è  $\frac{1}{1-r}$  si avrà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Ma per la disuguaglianza impostata all'inizio a maggior ragione sarà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2$$

(4.4)► Serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$

Come è noto  $r$  è la *ragione* ovvero il rapporto di un termine col precedente e per la proprietà di omogeneità si ha la scrittura più generale

$$p \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} pr^k$$

con  $p \in \mathbb{R}$ .

La somma parziale generica è data da

$$s_n = p + pr + pr^2 + \dots + pr^n = \frac{p - pr^{n+1}}{1 - r}$$

e si dimostra per induzione.

$$\text{Se } n=1 \text{ si ha } s_n = \frac{p(1-r^2)}{1-r} = \frac{p(1-r)(1+r)}{1-r} = p + pr$$

Per  $n+1$  si ha

$$p + pr + pr^2 + \dots + pr^n + pr^{n+1} = \frac{p - pr^{n+1}}{1-r} + pr^{n+1} = \frac{p - pr^{n+1} + pr^{n+1} - pr^{n+2}}{1-r} = \frac{p - pr^{n+2}}{1-r}$$

Se  $-1 < r < 1$  la ridotta generica sarà  $\frac{1}{1-r}$  che il lettore può dimostrare da solo per induzione.

Il carattere della serie si studia direttamente col passaggio al limite della ridotta generica senza far uso dei criteri di convergenza. Vediamo i diversi casi per  $n \rightarrow \infty$ :

- Se  $|r| < 1$  allora  $r^n \rightarrow 0$  e quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - pr^{n+1}}{1-r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{1-r} - \frac{pr^{n+1}}{1-r} \mapsto \frac{p}{1-r} - 0 = \frac{p}{1-r} \text{ la serie converge}$$

- Se  $|r| > 1$  allora  $r^n \rightarrow \infty$  e quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - pr^{n+1}}{1-r} \mapsto \frac{p}{1-r} - \infty = \frac{p}{1-r} \pm \infty \text{ la serie diverge}$$

- Se  $r = 1$  allora  $r^n = 1$  e la ridotta generica avrà la forma e il limite seguente

$$s_n = np \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} np = \infty \text{ la serie diverge}$$

- Se  $r = -1$  allora la serie sarà alternata ed indeterminata.

Pertanto l'intervallo di esistenza della somma della serie è dato da

$$\sum_{k=0}^{\infty} pr^k \doteq A \text{ se e solo se } r \in (-1, 1)$$

■

## 5 APPENDICE

$$(5.1) \blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Ricorriamo all'artificio di dimostrare che se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0 \text{ allora è necessariamente } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \ln \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 0 - \ln \sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n}$$

Applicando il teorema di L'Hopital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln n}{n} = -\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

$$(5.2) \blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}} = 1$$

E' elementare...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \dots \mapsto 1 \cdot 1 \cdot \dots = 1$$

(5.3)  $\blacktriangleright$  Dimostrazione del riordinamento di Riemann

La dimostrazione passa per alcune premesse.

Sia data la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Essa ha in generale infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi; allora possiamo costruire due serie separate estraendo tutti i termini positivi e tutti quelli negativi che indicheremo con simboli privi di estremi di sommatoria

$$a) \sum a_k^+, \sum a_k^-.$$

Di tali serie possiamo definire i termini generici nel modo seguente

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

dove se  $a_n$  è positivo  $\Rightarrow a_n^+ = a_n, a_n^- = 0$  e se  $a_n$  è negativo  $\Rightarrow a_n^+ = 0, a_n^- = a_n$ .

Per come sono stati definiti i termini generici delle due serie a) si ha che

1. se la serie data è semplicemente convergente le due serie a) divergono
2. se la serie data è assolutamente convergente le due serie a) convergono e la somma delle loro somme è la somma della serie data.

Il caso 2. discende direttamente dalla proprietà di linearità delle somme; il caso 1. discende quindi dal 2.

Ed ora passiamo al riordinamento di Riemann costruendone uno che porti alla somma prestabilita  $A$ . Costruiamo una somma parziale generalizzata prendendo un numero di termini  $p$  di

$\sum a_k^+$  strettamente indispensabile a superare  $A$  e quindi aggiungendo un numero di termini  $q$  di

$\sum a_k^-$  strettamente indispensabile a tornare sotto  $A$ .

La situazione a questo punto è la seguente:

$$\sum_{k=1}^p a_k^+ + \sum_{k=1}^q a_k^- = A - a_n < A$$

Iterando il procedimento si ottiene una disuguaglianza a meno di un termine  $a_n$  sempre più piccolo.

Ma poiché la serie è semplicemente convergente si ha  $a_n \rightarrow 0$  il che dimostra che la somma della serie riordinata è esattamente  $A$ .

■

Leonardo Calconi  
[leo@4dmatrix.it](mailto:leo@4dmatrix.it)

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: [www.4dmatrix.it/math](http://www.4dmatrix.it/math)