

LA FORMULA DI TAYLOR

CALCOLARE I VALORI DI UNA FUNZIONE

di Leonardo Calconi

Pubblicato il 04.04,08

Revisione del 05.08.2008

Come mia abitudine, ho cercato di curare la prima pagina in modo che possiate immediatamente valutare se la lettura di ciò che segue può interessarvi e di organizzare l'impaginazione in modo che ciascun argomento occupi un numero intero di pagine e sia stampabile separatamente.

Il contenuto di questo lavoro in sintesi.

Calcolo dei valori di una funzione in un suo punto mediante approssimazione e stima dell'errore commesso. Esempi di calcolo numerico. Alcune dimostrazioni della formula di Taylor ed alcune espressioni del resto. Polinomi di Taylor notevoli, serie di funzioni.

Argomenti popolari non trattati.

Calcolo dei limiti, studio della concavità-convessità di una funzione, dimostrazione dell'irrazionalità di e .

Per chi ha fretta:

| | |
|--|---|
| Formula di Taylor $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x)$ | Formula di MacLaurin $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)$ |
| Resto integrale $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ | Resto di Schloemilch $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{n! p} (x - x_m)^{n-p+1} (x - x_0)^p$ |
| Resto di Cauchy $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{n!} (x - x_m)^n (x - x_0)$ | Resto di Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ |

Sommario

| | | |
|------|--|-------------|
| 1 | Valori di una funzione | pagg. 2-7 |
| 1.1 | Approssimazione lineare | |
| 1.2 | Approssimazione polinomiale | |
| 2 | Verso la formula di Taylor | pagg. 8-10 |
| 2.1 | Il polinomio di Taylor | |
| 2.2 | Polinomi di Taylor notevoli | |
| 3 | La formula di Taylor | pagg. 11-13 |
| 3.1 | Prima dimostrazione della formula di Taylor | |
| 3.2 | Formula di MacLaurin | |
| 4 | Il resto | pagg. 14-19 |
| 4.1 | Resto di Peano | |
| 4.2 | Ordine degli infinitesimi | |
| 4.3 | Algebra di o piccolo | |
| 4.4 | Seconda dimostrazione della formula di Taylor | |
| 4.5 | Resto integrale | |
| 4.6 | Terza dimostrazione della formula di Taylor | |
| 4.7 | Resto di Schloemilch | |
| 4.8 | Resto di Cauchy | |
| 4.9 | Resto di Lagrange | |
| 4.10 | Quarta dimostrazione della formula di Taylor | |
| 5 | Stima dell'errore | pagg. 20-21 |
| 6 | Serie di funzioni: serie di Taylor e MacLaurin | pag. 22 |
| 7 | Appendice | pagg. 23-25 |

1 VALORI DI UNA FUNZIONE

Possiamo chiederci quale sia un procedimento utile per il calcolo del valore di una funzione in un suo punto, calcolo che normalmente non è banale.

Basti pensare, ad esempio, alla funzione \sqrt{x} , per la quale il calcolo è banale solo per quadrati perfetti.

O alla funzione esponenziale e^x per la quale il calcolo è banale solo per gli esponenti 0 e 1.

Un calcolo del genere può essere condotto per approssimazione mediante sostituzione della funzione data con un polinomio che in un dato punto coincida con essa e le cui derivate nello stesso punto coincidano con alcune derivate della funzione.

Affrontiamo l'argomento per gradi.

1.1 Approssimazione lineare

Possiamo calcolare il valore della funzione in un suo punto sfruttando il significato geometrico della derivata e avendo a disposizione un valore noto della funzione in un punto sufficientemente vicino a quello in corrispondenza del quale vogliamo calcolare il suo valore.

Sia $f(x_0)$ il valore noto della funzione derivabile in x_0 ed $f(x)$ il valore in x che vogliamo calcolare, con $x - x_0 = h$ sufficientemente piccolo.

La retta secante passante per i due punti

$$x_0, f(x_0)$$

$$x, f(x)$$

sarà rappresentata da un'equazione che possiamo ricavare dal sistema

$$(1.1) \begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda ricaviamo il valore di m :

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sostituendo questo valore nella prima equazione ricaviamo il valore di q :

$$q = f(x_0) - x_0 \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A questo punto abbiamo gli elementi per scrivere l'equazione della secante passante per i due punti la cui forma generica è $y = mx + q \Rightarrow$

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot x + f(x_0) - x_0 \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Ora, cosa accade se $h \rightarrow 0$?

Accade che la retta secante si approssima sempre più alla retta tangente in x_0 e quindi, poiché ivi la

funzione è derivabile, passando al limite potremo dire che il valore della funzione $f(x)$ in x è dato per approssimazione da

$$(1.2) \blacktriangleright f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'errore è dato ovviamente dalla differenza tra primo e secondo membro. Tale errore diminuisce al diminuire di h e poiché diminuisce più rapidamente di h potremo scrivere, senza incorrere in una forma indeterminata, che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Allora, se poniamo $R_1(x)$ come *resto di ordine 1*

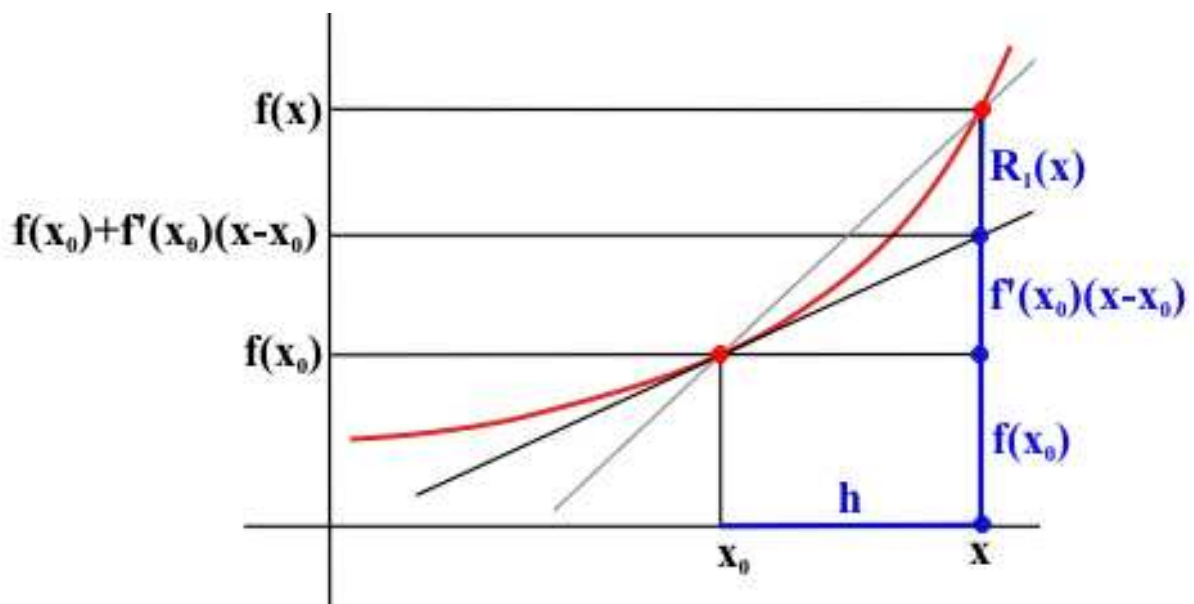
$$R_1(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

potremo riscrivere il limite come

$$(1.3) \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$$

ed il valore corretto della funzione nel punto x sarà dato da

$$(1.4) \blacktriangleright \boxed{f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_1(x)}$$



► Esempio: calcolare il valore di $f(x) = \sqrt{x}$ per $x = 16133$

Senza che il risiedere di x vicino ad un quadrato perfetto infici la validità del procedimento, prenderemo

$$f(x_0) = \sqrt{16129} = 127$$

per cui in base alla (1.2) l'equazione della retta tangente in $x_0 = 16129$ sarà data da

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{16129}}(x - 16129) + \sqrt{16129}$$

il che fornisce un valore approssimato di

$$\sqrt{16133} \cong \frac{1}{2 \cdot 127} \cdot (16133 - 16129) + 127 = 127.0157480314960\dots$$

mentre il valore esatto è

$$\sqrt{16133} = 127.0157470552372\dots$$

$R_1(x)$ è banalmente pari a -9.7626^{-7}

► **Esempio:** calcolare il valore di $f(x) = e^x$ per $x = 2$

Prendendo $f(x_0) = 0$, poiché $f(x_0) = f'(x_0) = 1$, secondo la (1.2) l'equazione della retta tangente e sarà data da

$$f(x) = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$$

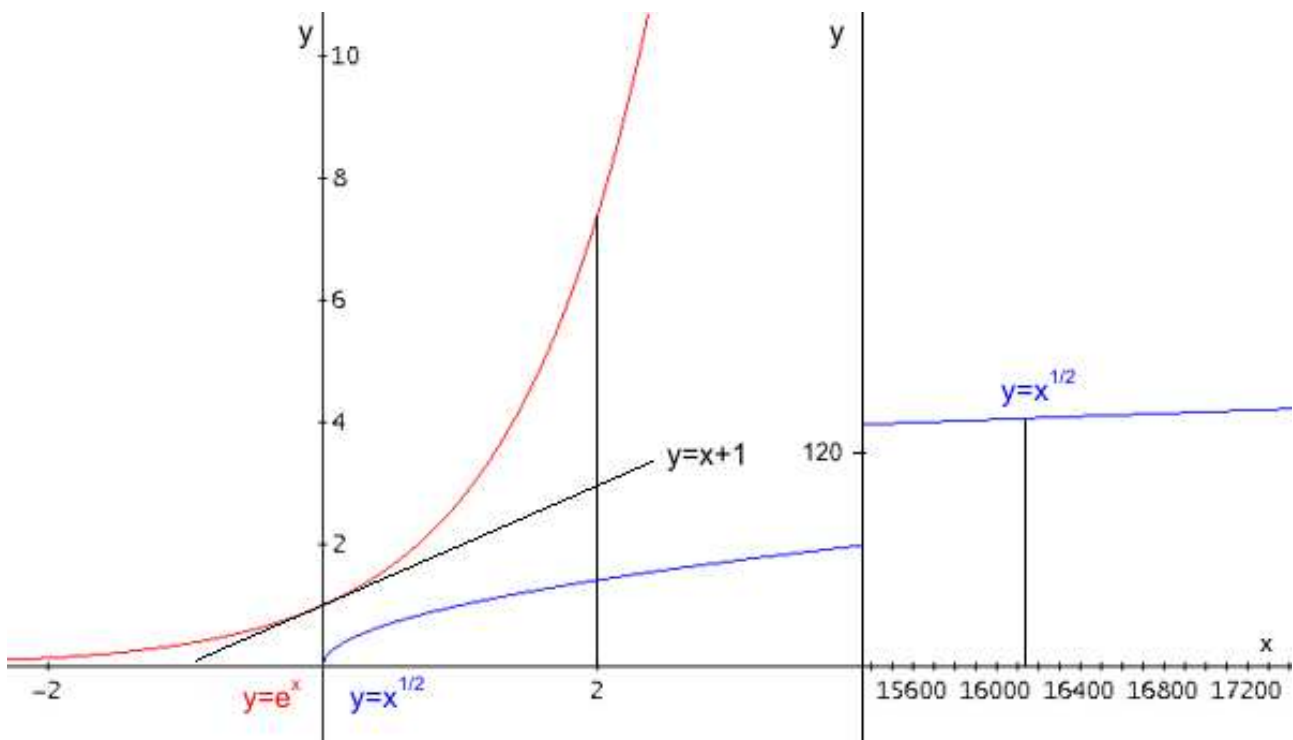
equazione che ci fornisce per $x = 2$ il valore approssimato

$$e^2 \cong 3$$

mentre il valore esatto è 7.389056098

con un valore di $R_1(x)$ molto alto.

Nei due esempi con lo stesso procedimento di calcolo abbiamo ottenuto valori della funzione nel punto scelto molto diversi per grado di approssimazione:



Infatti, come si vede dal grafico, nella funzione radice quadrata la tangente al punto $x_0 = 16129$ approssima molto bene la funzione stessa in un intorno sufficientemente alto di x_0 nel quale cade $x = 16133$, mentre nella funzione esponenziale con la tangente al punto $x_0 = 0$

l'approssimazione è accettabile solo in un intorno molto ristretto dal quale $x = 2$ cade molto al di fuori, il che geometricamente è chiaramente dovuto alla diversa pendenza delle due curve.

Vale la pena di sottolineare come in questo contesto il grado di approssimazione sia quantificabile solo a condizione di conoscere il valore della funzione in x , il che è un paradosso perché in tal caso non abbiamo nessun bisogno di eseguire il calcolo.

Infine, l'errore $R_1(x)$ non può essere né programmato né migliorato.

Prendendo nota fin d'ora che è indispensabile la derivabilità della funzione in x_0 altrimenti non potremmo scrivere alcuna equazione della retta tangente in tale punto, orientiamo il nostro lavoro nella direzione della ricerca di un metodo di calcolo più evoluto che consenta in un primo momento migliori approssimazioni ed in seguito approssimazioni prestabilite.

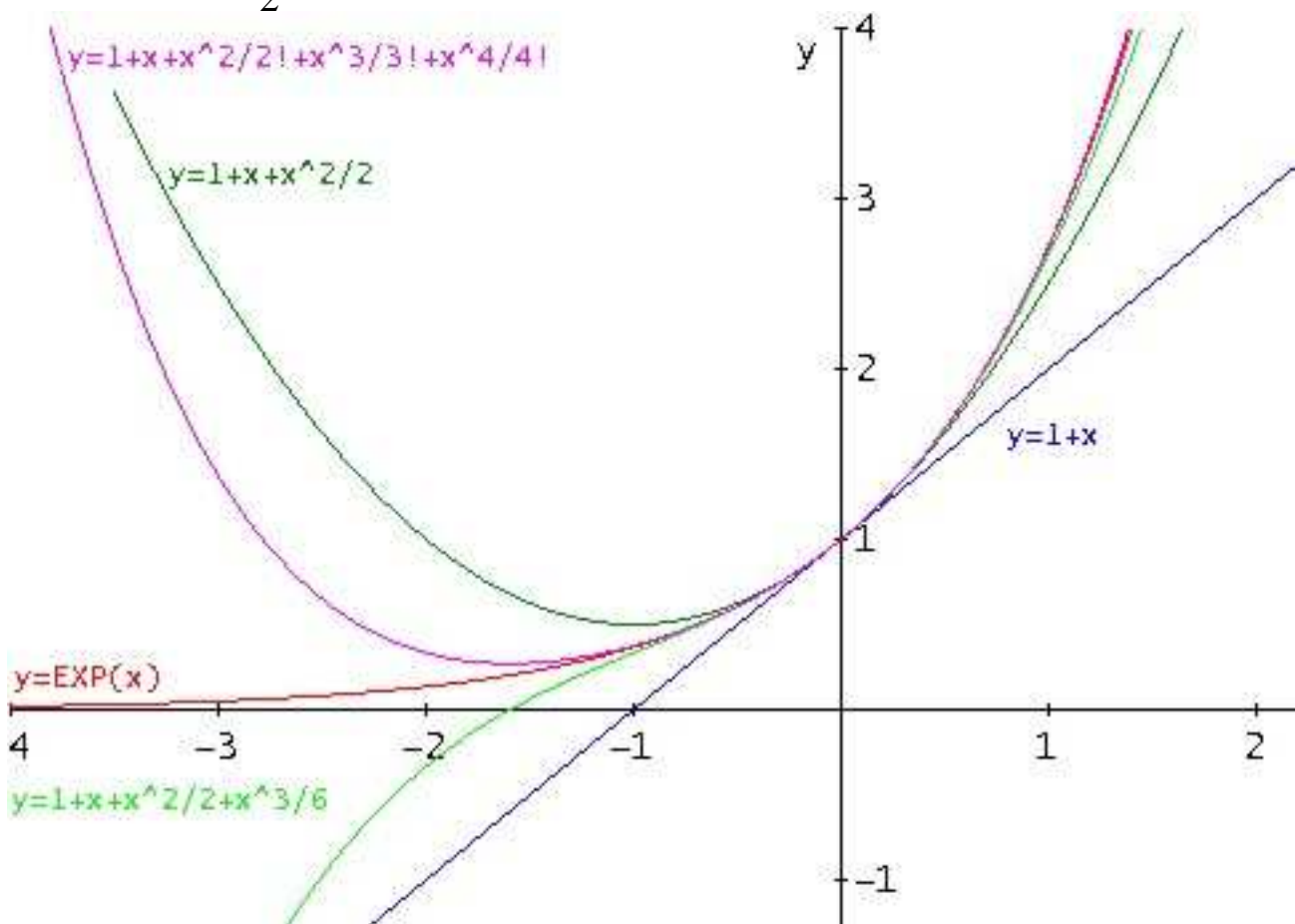
1.2 Approssimazione polinomiale

Possiamo implementare il procedimento del paragrafo precedente ed ottenere un migliore grado di approssimazione diminuendo il valore del resto se sostituiamo all'equazione della retta tangente in x_0 l'equazione di una funzione di grado n che approssimi la funzione data quanto più possibile in un intorno il più ampio possibile di x_0 .

E' intuitivo che raggiungeremo tale scopo con una curva che nel punto comune x_0 si *appiattisca* quanto più possibile sulla curva della funzione data.

Riprendendo il secondo degli esempi precedenti, e^2 , possiamo pensare di sostituire all'equazione della retta tangente, che chiameremo P_1 , un polinomio di secondo grado che in x_0 coincida con la funzione e la cui derivata coincida con la derivata della funzione, ovvero un polinomio per il quale possiamo scrivere la stessa equazione della retta tangente in quel punto:

$P_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ che fornisce per $x = 2$ il valore approssimato $e^2 \cong 5$



Passando ad un polinomio di terzo grado con le stesse modalità

$$P_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \Rightarrow P_3' = P_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow P_3'' = 1$$

dal quale otterremo un valore ancora più approssimato $e^2 \cong 6.\bar{3}$.

Se $f(x)$ è derivabile n volte il polinomio di grado n avrà la forma

$$(1.5) \blacktriangleright P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

ed è evidente come una sua derivata di ordine qualsiasi in x_0 coincida con P_1 .

Nel nostro esempio P_5 fornisce un valore approssimato molto vicino al reale: $e^2 \cong 7.2\bar{6}$.

Come si evince dai grafici, al crescere del grado del polinomio aumenta l'ampiezza dell'intorno di x_0 per i valori all'interno del quale la curva descritta dal polinomio stesso quasi coincide con quella della funzione data.

► Esempio. Calcolare il valore di $f(x) = \sin x$ per $x = \frac{\pi}{8}$ con un polinomio di terzo grado.

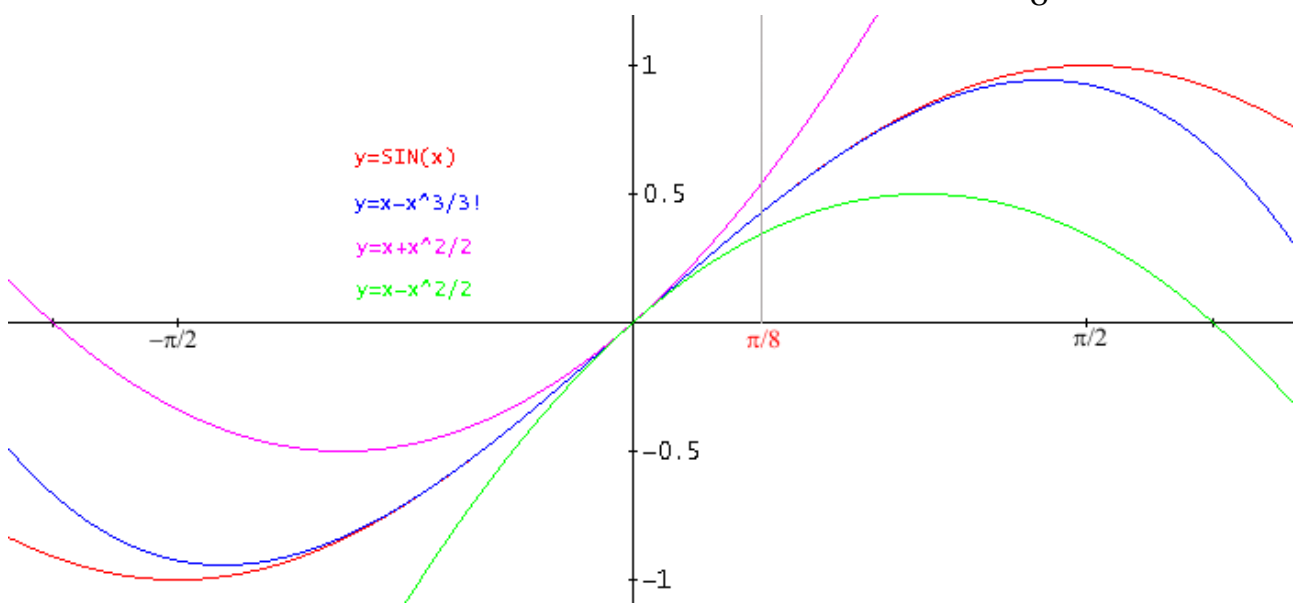
Poiché tutte le derivate di ordine pari della funzione seno sono nulle in x_0 ivi la funzione presenta un flesso; ne consegue che non potremo adoperare per approssimarla polinomi di grado n pari che hanno derivate n sempre diverse da zero e che quindi in x_0 presentano una concavità o convessità.

Ad esempio per $P_2 = x \pm \frac{x^2}{2}$ si ha $P_2'' = \pm 1 \neq f''(x) = 0$; geometricamente è chiaro che non

possiamo utilizzare tale polinomio in quanto esso rappresenta una parabola incompatibile con l'andamento della funzione seno. Pertanto il primo polinomio utile di grado superiore al primo è

$$\blacktriangleright (1.6) P_3 = x - \frac{x^3}{6} \Rightarrow P_3''' = f'''(x) = 1$$

che fornisce un valore approssimato di 0.40279... contro un valore reale $\sin \frac{\pi}{8} = 0.3826...$



► **Esempio.** Calcolare il valore di $f(x) = \cos x$ per $x = \frac{\pi}{8}$ con un polinomio di quarto grado.

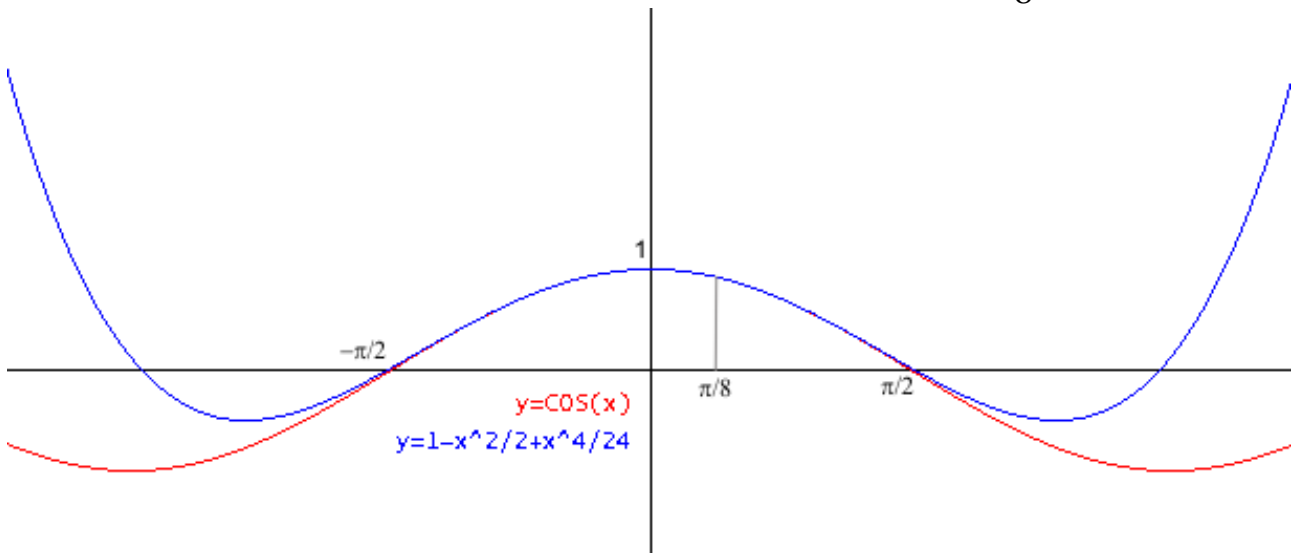
Per la funzione coseno sono le derivate di ordine dispari ad essere nulle. Pertanto, in analogia a quanto visto per la funzione seno, non potremo utilizzare per l'approssimazione polinomi di grado dispari.

Il primo polinomio di grado pari è

$P_2 = 1 - \frac{x^2}{2}$ che offre un'approssimazione insufficiente e pertanto dovremo utilizzare il successivo

$$(1.7) P_4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Rightarrow P_4 = f^4(x) = 1$$

che fornisce un valore approssimato di 0.9165... contro un valore reale $\cos \frac{\pi}{8} = 0.9238...$



Se ora calcoliamo i valori delle due funzioni per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo dai rispettivi polinomi

$$\sin x \Rightarrow P_3 = 0.704652...$$

$$\cos x \Rightarrow P_4 = 0.707429...$$

che approssimano ambedue il valore noto $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106$

Come ci aspettavamo P_4 approssima meglio di P_3 grazie al suo maggior grado.

Notiamo infine come tutti i polinomi di grado n abbiano, necessariamente, la stessa equazione della retta tangente in x_0 :

$$\text{Equazione per } \sin x \Rightarrow y = 1(x - 0) + 0 = x, \text{ bisettrice dei quadranti 1-3}$$

$$\text{Equazione per } \cos x \Rightarrow y = 0(x - 0) + 1 = 1, \text{ parallela all'asse } x. \blacksquare$$

2 VERSO LA FORMULA DI TAYLOR

Viene spontaneo chiedersi se le (1.5), (1.6) e (1.7) possono essere generalizzate e se possiamo trovare una forma polinomiale unica che ci permetta di approssimare il valore di qualsiasi funzione e non solo di quelle viste in precedenza per le quali abbiamo ricavato in via euristica quelli che più avanti vedremo essere polinomi di MacLaurin.

2.1 Il polinomio di Taylor

Supponiamo che un polinomio di grado n con coefficienti reali sia derivabile n volte.

Stabiliamo che $f(x)$ rappresenti per ora tale polinomio:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$$

$$f'(x) = a_1 + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$f^k(x) = k!a_k + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}$$

$$f^n(x) = n!a_n$$

Se dopo aver derivato sostituiamo x con 0 otterremo

$$f(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(0)$$

$$f'(0) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(0)$$

$$f^k(0) = k!a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$$

$$f^n(0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

ovvero avremo ricavato i valori dei coefficienti in funzione dei valori delle derivate nello zero.

Sostituendoli nell'espressione del nostro polinomio avremo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^k(0)}{k!}x^k + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Sostituendo lo 0 con un x_0 qualsiasi l'espressione precedente diverrà

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ovvero avremo trasformato il polinomio di partenza in un altro espresso nei valori delle sue derivate successive in un punto noto x_0 .

Ebbene, questo è esattamente un polinomio di Taylor di grado n e centro x_0 :

$$T_n(f(x)) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$(2.1) \blacktriangleright \boxed{T_n(f(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

► **Esempio:** sviluppare un polinomio di Taylor di ordine 4 con centro 0 per $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-3x}$

Il lavoro da svolgere è quello di mettersi in condizione di derivare facilmente riconducendosi a funzioni elementari. Pertanto utilizziamo la proprietà dei logaritmi per scrivere

$$f(x) = \ln(1+2x) - \ln(1-3x)$$

Ora sviluppiamo separatamente due polinomi di Taylor per la funzione elementare:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} T_4(\ln(1+2x)) &= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4(\ln(1-3x)) &= -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} - \frac{(-3x)^4}{4} \\ &= -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3 - \frac{81}{4}x^4 \end{aligned}$$

Pertanto lo sviluppo completo per la funzione sarà

$$\begin{aligned} T_4\left(\ln \frac{1+2x}{1-3x}\right) &= T_4(\ln(1+2x)) - T_4(\ln(1-3x)) \\ &= 5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{3}x^3 + \frac{65}{4}x^4 \end{aligned}$$

Osservando le due curve si evince come T_4 offra valori sufficientemente precisi con uno o più decimali per $x < 0.2$.

Infatti si ha:

$$x = 0.100 \Rightarrow T_4 = 0.53829166\bar{6} \Rightarrow f(x) = 0.538996500\dots$$

$$x = 0.150 \Rightarrow T_4 = 0.853851562\dots \Rightarrow f(x) = 0.860201265\dots$$

$$x = 0.200 \Rightarrow T_4 = 1.21933333\bar{3} \Rightarrow f(x) = 1.252762968\dots$$

$$x = 0.250 \Rightarrow T_4 = 1.652018229\dots \Rightarrow f(x) = 1.791759469\dots$$

$$x = 0.320 \Rightarrow T_4 = 2.408686933\dots \Rightarrow f(x) = 3.713572066\dots$$

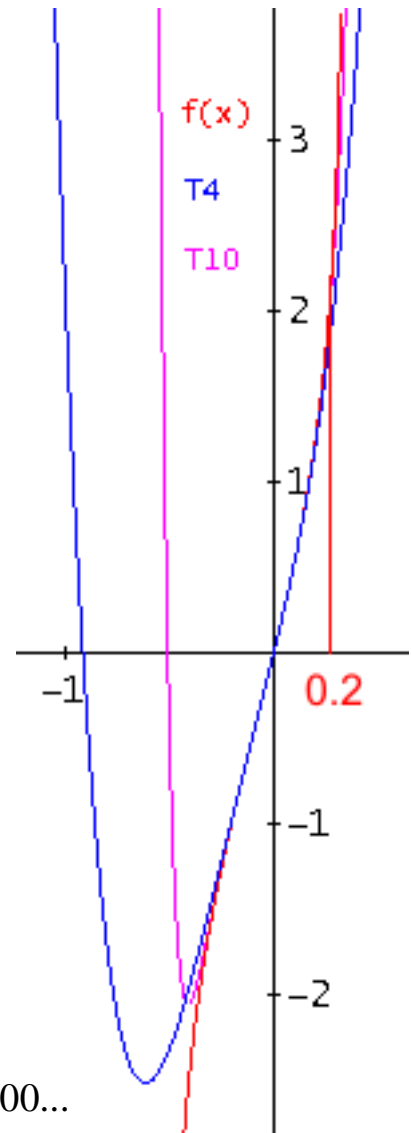
Per ottenere maggior precisione occorre un polinomio di Taylor di grado più elevato, ad es. un T_{10} :

$$5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{3}x^3 + \frac{65}{4}x^4 + 55x^5 + \frac{665}{6}x^6 + \frac{2315}{7}x^7 + \frac{6305}{8}x^8 + \frac{20195}{9}x^9 + \frac{11605}{2}x^{10}$$

Con questo polinomio otteniamo per $x = 0.25$ un valore approssimato di 1.779092569...

contro un valore reale di

1.791758469.



Osserviamo come ancora non abbiamo a disposizione un metodo per calcolare l'entità dell'errore che conosciamo solo in quanto di volta in volta abbiamo calcolato i reali valori delle funzioni con la calcolatrice scientifica.

2.2 Polinomi di Taylor notevoli

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots + \binom{a}{n}x^n$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots + x^{3n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^5}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{5x^7}{16} + \dots$$

$$\frac{8}{x^2+4} = 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{32} + \frac{x^8}{128} + \dots \text{ Strega di Agnesi. Approfondimento in (A4).}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \dots \text{ Curva di Gauss (A4).}$$

Non possiamo utilizzare un polinomio di Taylor per calcolare i valori della funzione π^x . Gli amanti degli approfondimenti in caratteri piccoli troveranno nell'appendice (A3) un metodo per sviluppare indirettamente un tale polinomio passando per una interessante identità. ■

3 LA FORMULA DI TAYLOR

Cosa manca al polinomio di Taylor per fornire il valore esatto di una funzione in un suo punto ?
Esattamente la quantità

$$R_n(x) = f(x) - T_n(f(x))$$

che chiamiamo resto di ordine n .

In questo paragrafo dimostriamo che se $f(x)$ è derivabile n volte, possiamo decomporre la funzione in un polinomio di grado n e resto di ordine n mediante la *formula di Taylor*:

$$(3.1) \blacktriangleright \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x)}$$

Controlliamo subito come per $n=1$ tale risultato lo avevamo già ottenuto con la (1.4).

Infatti essendo $f^0(x_0) = f(x_0)$ e $0! = 1$ si ha

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{1} \cdot 1 + \frac{f'(x_0)}{1} \cdot (x-x_0) + R_1(x)$$

3.1 Prima dimostrazione della formula di Taylor

Dimostriamo la formula nell'ipotesi semplificativa che la derivata ennesima di $f(x)$ sia continua in x_0 .

Come abbiamo già visto con la (1.3) nel paragrafo 1.1, se la (3.1) è vera deve essere

$$(3.2) \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

dove il valore del resto di ordine n si ricava dalla (3.1) stessa.

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right]$$

Sostituendo nella (3.2) si vede immediatamente che il limite assume una forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right]}{(x-x_0)^n} = \frac{0}{0}$$

Possiamo allora ricorrere al teorema di L'Hopital calcolando le derivate del numeratore e del denominatore rispetto ad x , ma otteniamo di nuovo una forma indeterminata dello stesso tipo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + \dots + f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \right]}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0}$$

Non è difficile vedere che la forma indeterminata scomparirà dopo aver applicato ancora $n - 1$ volte il teorema di L'Hopital:

$$(3.3) \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{n!} = 0$$

Quindi la (3.2) è dimostrata e con essa la formula di Taylor, ma per ora solo nell'ipotesi che $f^n(x)$ sia continua in x_0 .

Nel primo degli esempi utilizzati in questo lavoro abbiamo calcolato il valore della funzione radice quadrata in un suo punto mediante la (1.4) che è esattamente uno sviluppo della formula di Taylor per $n = 1$.

Anche se ciò può apparire ridondante, applichiamo ora compiutamente tale formula alla stessa funzione.

► Esempio: calcolare un valore di $f(x) = \sqrt{x}$ per $x = 16133$ con maggior precisione.

Se fissiamo di nuovo $f(x_0) = \sqrt{16129}$ e calcoliamo le derivate successive di $\sqrt{x_0}$

$$f'(x_0) = +\frac{1}{2x_0^{1/2}}; f''(x_0) = -\frac{1}{4x_0^{3/2}}; f'''(x_0) = +\frac{3}{8x_0^{5/2}}; f^{(4)}(x_0) = -\frac{15}{16x_0^{7/2}}$$

applicando la formula di Taylor in successione per $n = 1, 2, 3, 4$

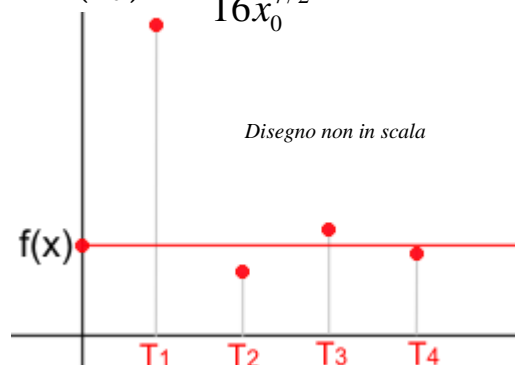
otterremo i seguenti sviluppi:

$$f_1(x) = 127 + \frac{4}{2 \cdot 16129^{1/2}} + R_1(x)$$

$$f_2(x) = 127 + \frac{4}{2 \cdot 16129^{1/2}} - \frac{16}{2 \cdot 4 \cdot 16129^{3/2}} + R_2(x)$$

$$f_3(x) = 127 + \frac{4}{2 \cdot 16129^{1/2}} - \frac{16}{2 \cdot 4 \cdot 16129^{3/2}} + \frac{3 \cdot 64}{6 \cdot 8 \cdot 16129^{5/2}} + R_3(x)$$

$$f_4(x) = 127 + \frac{4}{2 \cdot 16129^{1/2}} - \frac{16}{2 \cdot 4 \cdot 16129^{3/2}} + \frac{3 \cdot 64}{6 \cdot 8 \cdot 16129^{5/2}} - \frac{15 \cdot 256}{24 \cdot 16 \cdot 16129^{7/2}} + R_4(x)$$



Le approssimazioni successive sono quindi:

| n | $f_n(x)$ | $ R_n(x) $ |
|----------|----------------------------|------------------|
| 1 | 127.0157480314960629921... | 9.762588^{-7} |
| 2 | 127.0157470551161574764... | 1.210525^{-10} |
| 3 | 127.0157470552372288268... | 1.876002^{-14} |
| 4 | 127.0157470552372100607... | 3.200000^{-18} |
| ∞ | 127.0157470552372100639... | 0 |

Come si vede ad ogni passaggio si ottengono quattro decimali corretti in più, ed è quindi evidente la possibilità di iterare il procedimento avendo stabilito in precedenza il grado di precisione che è necessario fissando un opportuno resto di ordine n .

In ogni caso $|R_n(x)|$ è trascurabile rispetto a $(x - x_0)^n$ perché nell'intorno del punto di centraggio della Formula di Taylor, 16129, il polinomio di Taylor approssima con grande precisione la funzione radice quadrata.

3.2 Formula di Mac Laurin

► **Esempio:** calcolare il valore di $f(x) = e^x$ per $x = 9$ con precisione di tre decimali.

Sappiamo che $f^n(x) = e^x$ per qualunque n ; l'unico valore noto della funzione è $e^0 = 1$ e quindi poniamo $x_0 = 0$. Per $n = 30$ la formula di Taylor fornirà, a meno del resto $R_{30}(x)$:

$$f_{30}(x) \cong 1 + 9 + \frac{9^2}{2!} + \frac{9^3}{3!} + \dots + \frac{9^{30}}{30!} = 8103.083863\dots$$

mentre il valore esatto è:

$$e^9 = 8103.083927\dots$$

Si noti il notevole sviluppo necessario per ottenere un'approssimazione di soli tre decimali e come sia insignificante il valore del resto rispetto a $(x - x_0)^{30} = 9^{30}$

Abbiamo appena adoperato la *formula di Mac Laurin* che consiste nella formula di Taylor centrata in $x_0 = 0$:

$$(3.4) \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)}$$

Appare subito evidente che possiamo adoperare questa formula per approssimare i valori di alcune funzioni con valore noto nello zero:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + R_n(x)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(n/2)!} + R_n(x)$$

■

4 IL RESTO

In questo paragrafo dimostreremo le principali forme sotto le quali si presenta $R_n(x)$.

Inoltre vedremo altre tre dimostrazioni della formula di Taylor.

4.1 Resto di Peano

Se $f(x)$ è una funzione derivabile n volte si ha

$$f(x) \cong T_n(f(x))$$

Definendo come *resto di Peano* la differenza

$$(4.1) \blacktriangleright \boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(f(x))}$$

ovvero l'errore che si commette calcolando il valore della funzione col polinomio di Taylor corrispondente, avremo ancora

$$f(x) = T_n(f(x)) + R_n(x)$$

ossia la formula di Taylor.

Il resto di Peano non è di alcuna utilità nel calcolo numerico dei valori di una funzione in quanto fornisce solo informazioni sull'ordine di infinitesimo del resto stesso; proprio per questo motivo esso è invece utile nel calcolo dei limiti con la formula di Taylor.

4.2 Ordine degli infinitesimi

Possiamo definire il resto di Peano anche col simbolo di Landau 'o' *piccolo di*:

$$(4.2) \blacktriangleright R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

col quale si intende che $R_n(x)$ è per $(x - x_0)^n$ e per $x \rightarrow x_0$ un infinitesimo di ordine superiore, ovvero che nella (3.2) tende a zero più velocemente del denominatore.

Più in generale, essendo due funzioni definite in un intorno di x_0 senza che necessariamente lo siano anche in x_0 , una funzione è *o piccolo* di un'altra

$$f(x) = o(g(x))$$

se

$$(4.3) \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ovvero per $x \rightarrow x_0$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, il che accade se e solo se il numeratore tende a zero più velocemente del denominatore.

E questa è la definizione data dalla maggior parte degli autori.

Ma Tom Apostol sembra non essere d'accordo in quanto egli sostiene nel suo libro 'Calculus' che si tratta di un infinitesimo di ordine inferiore. Ma leggendo accuratamente si capisce trattarsi di un utilizzo diverso dei termini in quanto lui per infinitesimo di ordine inferiore, per $x \rightarrow x_0$, intende una quantità più piccola e non una funzione che tende a zero più velocemente. Sembra un paradosso, ma l'utilizzo di due termini di significato opposto per la stessa istanza è corretto.

► **Esempio:** date le due funzioni $y = x^2$, $y = x$ qual'è *o piccolo* di se x tende a zero?

$$x^2 = o(x)$$

Ecco i resti di tre funzioni fondamentali espressi come *o piccolo*:

$$e^x \Rightarrow o(x^n)$$

$$\sin x \Rightarrow o(x^{2n})$$

$$\cos x \Rightarrow o(x^{2n+1})$$

4.3 Algebra di *o piccolo*

$$o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$$

$$o(f(x)^a) - o(f(x)^a) = o(f(x)^a)$$

$$o(o(g(x)^a)) = o(g(x)^a)$$

$$o(f(x)^a) \cdot o(f(x)^b) = o(f(x)^{a+b})$$

$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$$

$$o(g(x)^a + o(g(x)^a)) = o(g(x)^a)$$

$$g(x)^a \cdot o(g(x)^b) = o(g(x)^{a+b})$$

$$o(cg(x)) = o(g(x)), \quad c \neq 0$$

4.4 Seconda dimostrazione della formula di Taylor

Dobbiamo dimostrare che la (3.1) è vera anche se $f^n(x_0)$ non è continua in x_0 .

Ovvero va dimostrato che:

$$(4.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Il punto di partenza quindi è lo stesso che nella prima dimostrazione, cioè un limite che si presenta sotto forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right]}{(x-x_0)^n} = \frac{0}{0}$$

Poiché $f^n(x_0)$ non è continua in x_0 , non potremo applicare il teorema di L'Hopital n volte ma solo $n-1$ volte giungendo a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left[f^{(n-1)}(x_0) + f^n(x_0)(x-x_0) \right]}{n!(x-x_0)} = \frac{0}{0}$$

A questo punto, non potendo iterare ancora una volta il procedimento e presentandosi il limite ancora sotto forma indeterminata, possiamo riscriverlo come

$$\frac{1}{n!} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^n(x_0) \right] = \frac{1}{n!} (f^n(x_0) - f^n(x_0)) = 0$$

dimostrando così la (4.4).

4.5 Resto integrale

Finora abbiamo parlato di *resti* in termini simbolici e quando ne abbiamo precisato un valore numerico lo abbiamo fatto sottraendo il valore del polinomio di Taylor centrato in x_0 dal valore della funzione in x che abbiamo dato per noto.

Dobbiamo quindi trovare una formula che ci permetta di calcolare direttamente un resto di ordine n .

Tale formula, che come vedremo può assumere forme diverse, è quella del *resto integrale*:

$$(4.5) \quad \boxed{R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}$$

Iniziamo dimostrando che

$$(4.6) \quad \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Procedendo per induzione e tenendo presente che

$$\frac{(x-t)^0}{0!} = \frac{1}{1}, \quad \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} = \frac{f(x_0)}{1},$$

per $n=0$ la (4.6) è banalmente vera in base alla formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(t) \Big|_{x_0}^x = f(x) - f(x_0) = R_0(x)$$

Supposto ora che la (4.6) sia vera per $n=n$ e che f^{n+2} esista e sia continua, dimostriamola per $n=n+1$.

Integriamo per parti il resto integrale

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{n+1}(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{n+2}(t) dt$$

ed otteniamo la (4.6) per $n=n+1$:

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t) dt$$

Il che dimostra la formula del resto integrale e suggerisce un'interessante considerazione. Quale ?

4.6 Terza dimostrazione della formula di Taylor

Dalla formula del resto integrale si intuisce che è possibile ottenere l'intera formula di Taylor iterando l'integrazione per parti e sostituendo t con x_0 :

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{(n+2)}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(x_0) + \dots + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{(n+k)}}{(n+k)!} f^{(n+k+1)}(t) dt$$

Ora, ponendo $n+1 = 0$ avremo esattamente la formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

4.7 Resto di Schloemilch

$$(4.7) \blacktriangleright R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{n! p} (x-x_m)^{n-p+1} (x-x_0)^p$$

Sia $x_m \in (x_0, x)$ e $\forall p > 0$.

Riscriviamo la formula del resto integrale col seguente artificio

$$(4.8) \blacktriangleright R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^{n-p+1} (x-t)^{p-1} dt$$

Ora, poiché $(x-t)^{p-1}$ non cambia segno nell'intervallo di definizione dell'integrale, possiamo applicare uno dei due teoremi integrali del valor medio (A1).

In base a questo teorema possiamo ottenere direttamente dalla (4.8) il resto di Schloemilch

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x_m) (x-x_m)^{n-p+1} \cdot \frac{(x-x_0)^p}{p}$$

4.8 Resto di Cauchy

Si ottiene dal resto di Schloemilch ponendo $p = 1$

$$(4.9) \blacktriangleright R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{n!} (x-x_m)^n (x-x_0)$$

4.9 Resto di Lagrange

Si ottiene dal resto di Schloemilch ponendo $p = n+1$

$$(4.10) \blacktriangleright R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Dimostriamolo supponendo, senza inficiare la generalità della dimostrazione, che sia $x > x_0$.

Poiché $f^{(n+1)}(t)$, $\forall t \in (x_0, x)$ è continua nell'intervallo (x_0, x) esisteranno un massimo e un minimo

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

e pertanto sarà

$$m \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq R_n(x) \leq M \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Calcolando l'integrale che è elementare avremo

$$m \leq R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \leq M$$

Ma poiché $f^{(n+1)}(t)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo, per il teorema del valor medio esisterà un $x_m \in (x_0, x)$ tale che

$$f^{(n+1)}(x_m) = R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$$

da cui la (4.9).

Ora scriviamo per esteso la formula di Taylor con resto di La grange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_m)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Poniamo $n=0$ ed otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_m)(x-x_0)$$

ovvero

$$f'(x_m) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)}$$

Vi sembra familiare questa formula?

Certamente lo è. Si tratta del teorema di La grange.

4.10 Quarta dimostrazione della formula di Taylor

Partiamo dalla formula fondamentale del calcolo integrale per una funzione definita nell'intervallo a, b ed integrabile $n+1$ volte:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(t) \Big|_a^b = f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

Ricordando la formula di integrazione per parti per u, v funzioni di t e introducendo una costante d'integrazione

$$-b \text{ tale che } u = f'(t), \quad v = (t-b)$$

integrando una prima volta per parti si ottiene

$$f(b) = f(a) + (t-b) f'(t) \Big|_a^b - \int_a^b (t-b) f''(t) dt$$

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \int_a^b (b-t) f''(t) dt$$

Integrazione per parti

L'integrale definito del prodotto di due funzioni u, v di t è dato da

$$\int_a^b uv' dt = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dt$$

dove

$$\int_a^b v' dt = v$$

e

$$uv \Big|_a^b = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$$

quindi ponendo

$$u = f''(t), \quad v = -\frac{(b-t)^2}{2}$$

ed integrando una seconda volta, si ottiene

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) - \frac{(b-t)^2}{2} f''(t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} f'''(t) dt$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2!} f'''(t) dt$$

Iterando il procedimento fino alla derivata $n+1$ si ottiene

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a) + \\ + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Ma allora, ponendo

$$a = x_0, \quad b = x$$

otterremo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

ovvero esattamente la formula di Taylor con *il resto integrale*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^j(x_0)}{j!} \cdot (x-x_0)^j + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

■

5 STIMA DELL'ERRORE

Se la funzione è derivabile $n + 1$ volte nell'intervallo e $f^{(n+1)}(x)$ è in esso continua, allora per questa derivata esisterà un massimo

$$M_{n+1} = M \left\{ |f^{(n+1)}(x)| : x \in [x, x_0] \right\}$$

e pertanto essendo

$$\blacktriangleright (6.1) \quad f^{(n+1)}(x) \leq M_{n+1}$$

il resto di La grange varrà

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(x_m)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Naturalmente esisterà anche un minimo

$$m_{n+1} = m \left\{ |f^{(n+1)}(x)| : x \in [x, x_0] \right\} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) \geq m_{n+1}$$

e pertanto varranno complessivamente le disuguaglianze

$$(6.2) \quad m_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq |R_n(x)| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

In realtà la disuguaglianza rispetto al minimo non ci interessa in quanto il lavoro da svolgere in questo contesto è quello di approssimare il valore di una funzione in un suo punto controllando che l'errore si mantenga al di sotto di un valore prefissato e non al di sopra.

Osserviamo anche che nel calcolo M_{n+1} non dovrà necessariamente essere il massimo di

$f^{(n+1)}(x)$ ma potrà essere anche un suo maggiorante.

Riprendiamo uno dei primi esempi di questo lavoro, rinfrescando prima la memoria sul perché derivate di qualsiasi ordine di e^x sono uguali ad e^x stessa (A2).

► Esempio: calcolare il valore di $f(x) = e^x$ per $x = 2$ con dieci cifre decimali esatte.

Il primo lavoro da svolgere è trovare un valore per M_{n+1} e per fare ciò dobbiamo avere informazioni su $f^{(n+1)}(x)$. Tutte le derivate di e^x sono uguali a e^x e quindi $f^{(n+1)}(x)$ è monotona e crescente in ogni intervallo e pertanto soddisfa la disuguaglianza (6.1) per la quale sceglieremo $M_{n+1} = 8 > e^2 = f^{(n+1)}(x)$.

Allora, nell'intervallo $[0, 2]$ dovrà essere

$$R_n(x) \leq \frac{8 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-11}$$

Per quale valore di n la disuguaglianza è verificata ?

Con $n = 19$ si ottiene

$$R_{19}(x) = 3.44798432974574126 \cdot 10^{-12} < 10^{-11}$$

Allora, sviluppando il polinomio di Taylor per $n = 19$, otterremo un valore di e^2 con dieci decimali sicuramente esatti:

$$T_{19}(e^2) \cong 7.38905609893017409\dots$$

Come visto in precedenza il valore esatto è

$$e^2 = 7.38905609893065022\dots$$

e quindi i decimali esatti sono ben dodici perché per $n = 19$ il valore del resto è largamente inferiore a quello programmato:

$$T_{19}(e^2) - e^2 = 4.7613 \cdot 10^{-13} < R_{19} < 10^{-11}$$

D'altronde, a causa del fattoriale a denominatore che cresce molto rapidamente, con $n = 18$ avremmo avuto un resto maggiore di quello prestabilito e quindi un numero di decimali esatti (nove) insufficiente:

$$R_{18}(x) = 3.44798432974574126 \cdot 10^{-11} > 10^{-11}$$

$$T_{18}(e^2) \cong 7.38905609821601687\dots$$

► **Esempio:** calcolare il valore di $f(x) = \cos x$ per $x = \frac{\pi}{117}$ con dieci cifre decimali esatte.

Tutte le derivate della funzione sono uguali a $\pm \sin x$, $\pm \cos x$ e quindi potremo scegliere

$M_{n+1} = 1$. Allora nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ nel quale risiede $\frac{\pi}{117}$ dovrà essere

$$R_n(x) \leq \frac{\left(\frac{\pi}{117}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-11}$$

Per $n = 5$ il secondo membro fornisce $5.205369574 \cdot 10^{-13}$, ampiamente inferiore all'errore programmato, mentre per $n = 4$ fornisce $1.163158258 \cdot 10^{-10}$, superiore a tale errore.

Ora, per $n = 5$ il polinomio di Taylor vale

$$T_5 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

che per $x = \frac{\pi}{117}$ fornisce il valore

$$0.9996395276714059\dots$$

contro un valore reale di

$$0.9996395276708854\dots$$

ma per $n = 4$ abbiamo ancora

$$T_4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

il che giustifica gli undici decimali esatti dell'approssimazione calcolata.

Non esiste un metodo analitico per stabilire a priori quale sia il valore di n da adottare perché il resto abbia un valore prestabilito.

■

6 SERIE DI FUNZIONI: SERIE DI TAYLOR E MACLAURIN

Fin qui abbiamo seguito un percorso con una certa direzione che va da una funzione data alla formula di Taylor.

Proviamo ora ad innestare la retromarcia e a vedere sotto quale aspetto si presenta tutta la faccenda se partiamo dalla formula di Taylor per arrivare alla funzione.

Analizziamo gli elementi che compongono la formula di Taylor (3.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x)$$

- a sinistra abbiamo una funzione
- il primo termine del membro a destra è una sommatoria con numero finito di termini
- il secondo termine del membro a destra è una quantità finita

Ora supponiamo che $R_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$; in tal caso la sommatoria rappresenta esattamente la funzione ed abbiamo a che fare con una somma infinita di termini che porta alla scrittura

$$(6.1) \blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = f(x)$$

il rovesciamento dei cui membri rispetto alla (3.1) è formalmente importante in questo contesto. Infatti esaminando con attenzione il primo membro di questa uguaglianza ci si accorge che si ha a che fare con il *limite di una somma parziale* ovvero con la somma di una *serie i cui termini sono funzioni*:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Questa serie di funzioni è detta *Serie di Taylor* per la funzione data $f(x)$ e la sua scrittura

differisce da quella del polinomio di Taylor solo in quanto rappresenta una somma con un numero *infinito* di termini anziché finito.

In una serie di funzioni attribuendo un valore alla variabile x la serie di funzioni diviene una serie numerica che può o meno convergere; tutti quei valori di x per i quali si ha la convergenza sono compresi in un intervallo detto *campo di convergenza* e nel campo di convergenza la somma della serie rappresenta una funzione.

Ma noi sappiamo che la somma di una serie è data dal limite dell'elemento ennesimo della successione di somme parziali per $n \rightarrow \infty$ da cui la (6.1).

Con questo rovesciamento di percorso noi possiamo dunque considerare una funzione data come *somma della Serie di Taylor* nella quale essa è sviluppabile (se lo è...).

Ciò che abbiamo fatto nei paragrafi precedenti per approssimare il valore di una funzione in un punto è stato calcolare una somma parziale di una serie di funzioni e valutare l'entità dell'errore che si commette considerando tale somma come valore della funzione nel punto.

Se l'errore si riduce a zero per $n \rightarrow \infty$ è coerente considerare come valore della funzione nel punto una somma infinita di termini ovvero la somma di una serie convergente.

Quanto detto per la formula (serie) di Taylor vale ovviamente per la formula (serie) di MacLaurin nella quale si pone $x_0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} \cdot x^k = f(x) \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Nozioni elementari sulle serie a termini reali valide senz'altro anche per le serie di funzioni di variabile reale sono contenute negli appunti "Criteri di convergenza" disponibili all'indirizzo www.4dmatrix.it/math. ■

7 APPENDICE

► A1

Secondo teorema integrale del valor medio

Se $f(x)$ è continua e di segno costante in $[x_0, x]$ allora esiste un punto x_m in questo intervallo tale che

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_m)(x - x_0)$$

Per dimostrare questo teorema occorre passare per il *primo teorema integrale del valor medio* per il quale se una funzione è continua ed integrabile in $[x_0, x]$ si ha

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(x) dx \leq M(x - x_0).$$

L'integrale separa le somme integrali inferiori da quelle superiori qualunque sia la partizione dell'intervallo in questione e pertanto il teorema è dimostrato scegliendo una partizione banale costituita solo dai punti x_0, x per la quale risulterà $s(P) = m(x - x_0), S(P) = M(x - x_0)$.

Se ora dividiamo i membri della disuguaglianza per $(x - x_0)$ si ha

$$m \leq \frac{1}{(x - x_0)} \int_{x_0}^x f(x) dx \leq M$$

Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di m, M e per il secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi la funzione assume tutti i valori tra questi due estremi e quindi anche il valore

$$f(x_m) = \frac{1}{(x - x_0)} \int_{x_0}^x f(x) dx$$

ed il secondo teorema integrale del valor medio è dimostrato.

► A2

Perché le derivate di qualsiasi ordine di e^x sono uguali ad e^x stessa ?

Dimostriamo prima che $D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$

Poiché la funzione logaritmo è continua possiamo scrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h}$$

Il limite ottenuto è un limite notevole del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + bx)^{1/x} = e^b$$

per cui scambiando $b \Rightarrow \frac{1}{x}$ e $x \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0$ avremo

$$\log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} \log_a e$$

e pertanto sarà

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

Poiché la funzione inversa del logaritmo è la funzione esponenziale, la derivata di questa sarà

$$De^a = \frac{1}{D \ln x} = x = e^a$$

e ciò vale, come è evidente, per qualsiasi ordine della derivata.

► A3

Approssimare pi greco

Perché non possiamo disporre di un polinomio di Taylor per calcolare i valori della funzione π^x ?
Semplice, perché abbiamo la derivata elementare

$$Da^x = a^x \ln a$$

ed è quindi evidente che un polinomio di Taylor per π sarebbe autoreferenziale in quanto potremmo calcolarne il valore solo tramite π stesso.

Il che, naturalmente, non significa che non possiamo utilizzare la formula di Taylor per calcolare le potenze di pi greco se pi greco stesso è noto:

$$\pi^x = 1 - x \ln \pi + \frac{x^2 \ln \pi^2}{2} + \frac{x^3 \ln \pi^3}{3!} + \frac{x^4 \ln \pi^4}{4!} + \dots + R_n(x)$$

Un metodo per calcolare il valore di π^1 è quello di sviluppare un polinomio di Taylor utilizzando l'identità di Machin:

$$\pi = 16 \arctg \frac{1}{5} - 4 \arctg \frac{1}{239}$$

Per ottenere un polinomio di Taylor per il secondo membro basta considerare che

$$T_n(f(x) + g(x)) = T_n(f(x)) + T_n(g(x))$$

$$T_n(\arctg x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Con pochi calcoli otteniamo per $n = 5$

$$T_5(f(x) + g(x)) = \left(16x + \frac{16x^3}{3} + \frac{16x^5}{5} \right) - \left(4x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{5} \right)$$

che per $x = \frac{1}{5}$ fornisce un valore di pi greco approssimato a tre decimali

$$T_5(\pi) = 3.158357\bar{3}... - 0.0167360... = 3.1416212... \cong \pi = 3.1415926$$

La storia è spesso ingiusta.

Tutti conoscono Brook Taylor (1685-1731), quello della nostra formula, e tutti ignorano John Machin (1689-1751). Bene, facciamo un po' di giustizia.

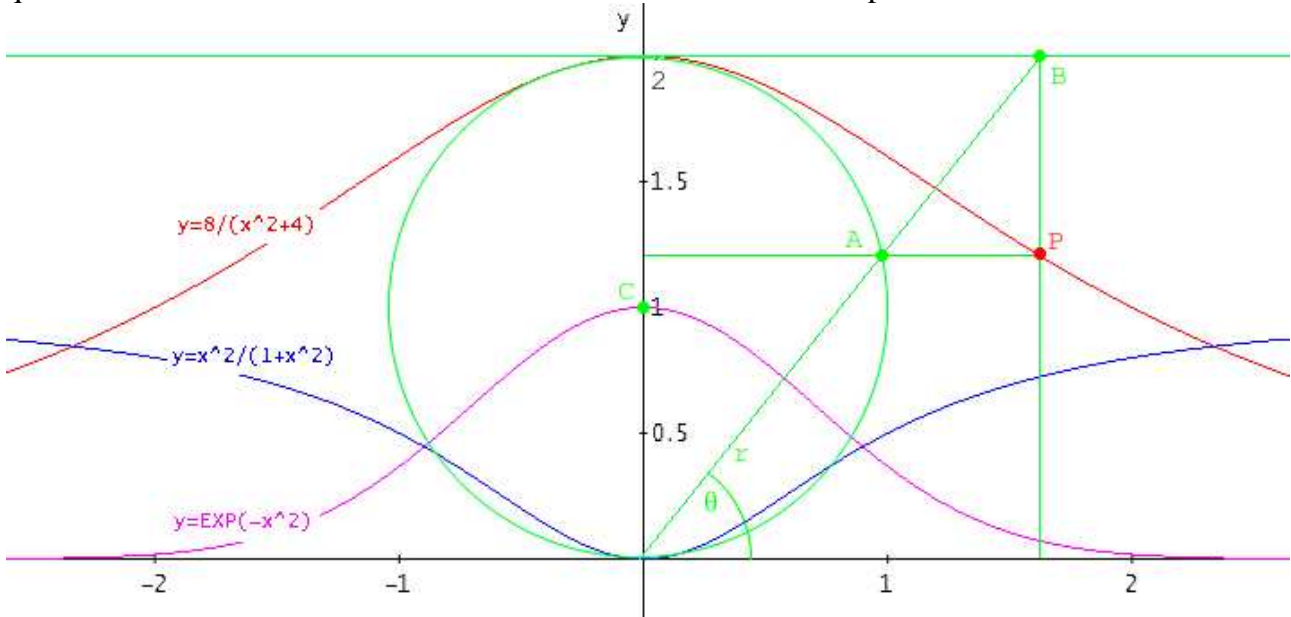
Sappiate che il nostro John è stato l'insegnante privato di matematica di Brook prima che quest'ultimo entrasse al St. John's College di Cambridge e che lo ha continuato a seguire negli studi corrispondendo con lui per diversi anni.

Sappiate anche che, per riconoscimento scritto dello stesso Taylor, fu Machin a dargli l'idea per il suo teorema durante un coffee-break !

► A4

La Strega di Agnesi

Quella rossa è la curva studiata da Maria Gaetana Agnesi nel 1748, quella viola è la curva di Gauss, quella blu l'ho tratta dal mio libro di analisi e sembra non avere un padre.



Nel rimandarvi ad una appropriata ricerca per saperne di più su questa grande donna matematica del settecento, devo dirvi che forse la curva in oggetto non può definirsi esattamente sua in quanto fu studiata prima di lei da altri due matematici nel 1703: Guido Grandi e Pierre de Fermat. Il nomignolo di **strega** deriva da una topica lessicale del matematico John Colson che confuse il termine italiano della Agnesi **aversiera** (o **versiera**), o curva con seno inverso, con **avversaria** che tradusse poi in **witch** = **strega** poiché con la parola **avversaria** si identificava appunto una **strega**.

Sia una circonferenza di raggio $s = 1$ e centro $c(0,1)$.

Sia r una retta di equazione $y = mx$ e coefficiente angolare m , con $\pi \leq \theta \leq 0$.

Al variare di m la curva è tracciata dal punto P che ha l'ascissa di A e l'ordinata di B .

Descriviamo la versiera con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{2s}{m} \\ y = \frac{2sm^2}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2s \cot \theta \\ y = 2s \sin^2 \theta \end{cases}$$

ovvero con l'equazione esplicita

$$y = \frac{8s^3}{x^2 + 4s^2}; \text{ per } s = 1 \Rightarrow y = \frac{8}{x^2 + 4}; \text{ per } s = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Notiamo come pur essendo la funzione definita in tutto \mathbb{R} , il corrispondente polinomio di Taylor non converge per tutti i numeri reali essendo il raggio di convergenza 2 per l'intervallo $[-2, 2]$.

Ciò è dovuto al fatto che l'equazione ha radici complesse $2i, -2i$. ■

Leonardo Calconi

leo@4dmatrix.it

Data della prima pubblicazione: 29/04/2007

Una versione aggiornata e corretta potrebbe essere disponibile all'indirizzo: www.4dmatrix.it/math